

离散数学作业 10

Problem 1

一个图的**度序列**是由该图的各个顶点的度按**非递增顺序**排列的序列。求下列各个图的度序列。

a) K_4

c) W_4

b) C_4

d) Q_3

Problem 2

证明或反驳：若无向图 G 至少有两个顶点且各顶点度数均不相同，则 G 不是简单图。

Problem 3

设无向图 G 有 ν 个点， ε 条边， $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示 G 中度最小和度最大的点的度，证明 $\delta(G) \leq \frac{2\varepsilon}{\nu} \leq \Delta(G)$ 。（其中 $\frac{2\varepsilon}{\nu}$ 称为图的**顶点平均度**）

Problem 4

对简单图 $G = K_2 \cup K_3$,

1) 先写出图的邻接矩阵 A ，关联矩阵 B ，然后计算矩阵 $D = BB^T - A$ 。

2) D 与原来的图什么关系？试解释其原因。

Problem 5

若简单图 G 与 \bar{G} 是同构的, 则 G 称为**自补图**

试证明: 若正则图 G 是自补图, 则图 G 的顶点数 ν 满足 $\nu \equiv 1 \pmod{4}$ 。

Problem 6

令 G 是至少有两个顶点的无向图, 证明或反驳:

- a) 删除 G 中一个度最大的点和相关的边, 不会增加图的顶点平均度;
- b) 删除 G 中一个度最小的点和相关的边, 不会减少图的顶点平均度。

Problem 7

证明: 若图 G 是不连通的, 则 G 的补图是连通图。

Problem 8

判断下列各图是否是强连通的, 如果不是, 再判断是否是弱连通的。

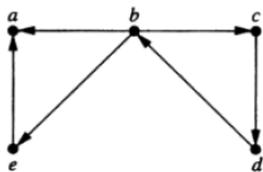


图 1: *
(1)

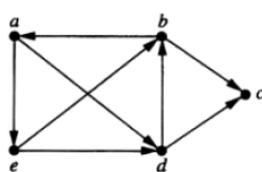


图 2: *
(2)

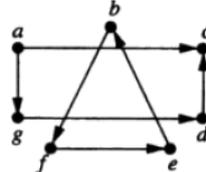


图 3: *
(3)

Problem 9

证明: 设 G 是具有 n 个结点的简单无向图, 如果 G 中每一对结点的度数之和均大于等于 $n - 1$, 那么 G 是连通图。

Problem 10

设 G 是具有 n 个结点 k 条边的简单无向图。证明：如果有

$$k > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

则 G 是连通图。