离散数学作业 11

Problem 1

试确定下方所示各图是否具有欧拉回路。若存在欧拉回路，则构造出一条欧拉回路。若不存在，试确定这个图是否具有欧拉通路。若存在欧拉通路，则构造出一条欧拉通路。

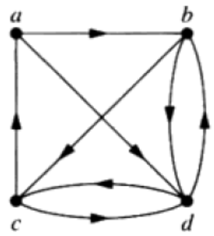


图 1: (1)

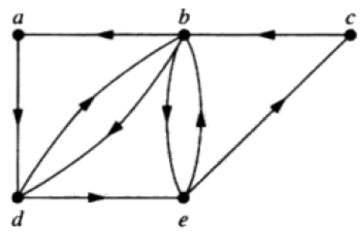


图 2: (2)

Problem 2

若 G 是欧拉图，证明或反驳：

1) 当 G 的顶点数是奇数时，若补图 $\bar{G}$ 是连通的，则 $\bar{G}$ 中存在欧拉通路。

2) 当 G 的顶点数是偶数时，若补图 $\bar{G}$ 是连通的，则 $\bar{G}$ 中存在欧拉通路。

Problem 3

给定简单图 G（$|G| \geq 3$），定义线图 $L(G)$ 如下：

- 对 G 中的每条边，$L(G)$ 中恰好有一个顶点与之对应；

- $L(G)$ 中任意两点相邻当且仅当它们在 G 中对应的两条边相邻（即有一个公共顶点)。

证明若 G 是简单、连通的 r-正则图（每个顶点度数均为 r)，则 $L(G)$ 是欧拉图。然后举例说明反之不一定成立。

Problem 4

下方所示各图是否拥有哈密顿通路？若有哈密顿通路，则求出这样一条通路。若没有哈密顿通路，则论证为什么这样的通路不存在。

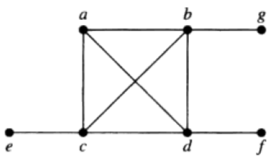


图 3: (1)

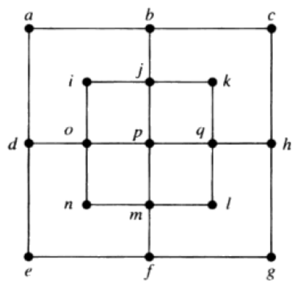


图 4: (2)

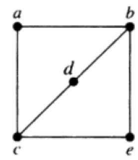
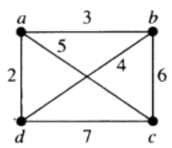


图 5: (3)

Problem 5

通过求出所有哈密顿回路的总权数并且确定出总权数最小的回路，来解决下图的旅行商问题。



Problem 6

今有 $n(n \geq 3)$ 个人。已知他们中的任何两个人合起来认识其余 $n-2$ 个人，证明:
这 n 个人可以排成一行，使得除排头和排尾外，其余每个人均认识他两旁

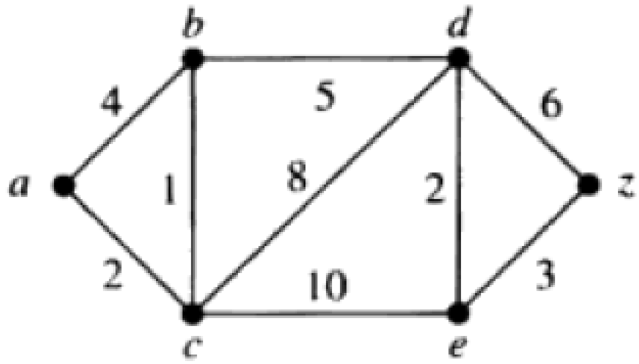
的人。并且当 $n \geq 4$ 时，这 n 个人可以排成一个圆圈，是的每个人都认识他两旁的人。

Problem 7

证明：K_n 有 $H = (n-1)!/2$ 条哈密尔顿回路。

Problem 8

用弗洛伊德算法求图中所有顶点对之间的距离。

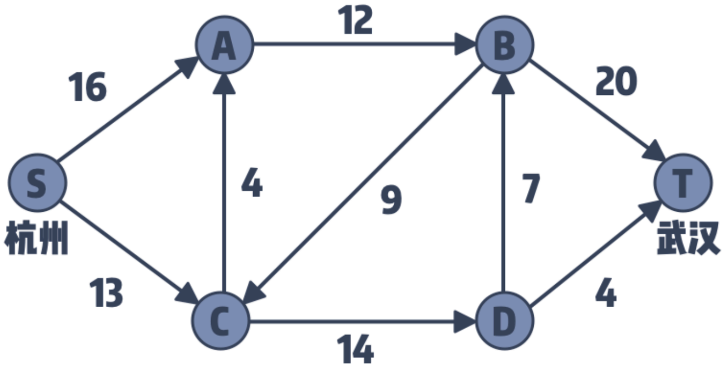


Problem 9

若边的权可以为负数，$Dijkstra$ 算法能否正确求出最短路？若可以，请给出证明；若不能，请举出一个反例并分析说明。

Problem 10

新冠疫情让口罩变成了稀缺资源。所以，全国各地都在为武汉捐献物资。假设现在因为种种原因，我们只能通过地面线路来运输口罩物资，并且每一条线路是有流量限制的。假设不考虑运输速度，并且源点 S（杭州）的口罩物资产量是足够多的，我们需要求解汇点 T（武汉）在不计速度的情况下能收到多少物资？


A
B
S
T
C
D
12
16
20
4
9
7
杭州
武汉
13
4
14