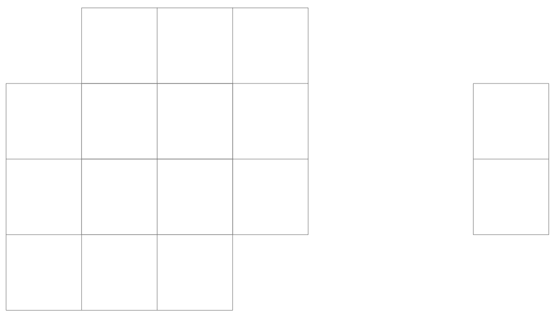
离散数学作业 12

Problem 1

证明：一个无回路的简单连通图最多只有一个完美匹配。（完美匹配指能饱和所有顶点的匹配）

Problem 2

证明一个 4×4 的方格纸板挖去左上角和右下角后不能用剪刀裁剪成若干 1×2 的小矩形。



Problem 3

试证明：如果简单图 G 是二部图，它有 n 个结点 m 条边，则 $m \leq \frac{n^2}{4}$。

Problem 4

令 k 为一整数。对于任意有限集合，证明对它的任意两个 k 划分都存在一个相同的代表集。

- 集合的 k **划分**指划分为大小相同的互不想交的 k 个子集，为简便起见，设集合的大小为 k 的整数倍从而每个子集均有相同个元素。
- 一个划分的**代表集**指从每个子集中取出一个元素而构成的集合。

举例: 集合 $\{1,2,3,4\}$ 的一个 2 划分为 $A:\{1,2\}\{3,4\}$。此划分的代表集有 $\{1,3\},\{2,3\},\{1,4\},\{2,4\}$，但 $\{1,2\}$ 不是其代表集。集合的另外一个划分为 $B:\{2,3\}\{1,4\}$。易见，A 与 B 存在相同的代表集 $\{1,3\}$。

Problem 5

考虑 $N\times M$ 的网格，以其中的方格作为点集，任意两个点之间有边当且仅当对应的两个方格相邻，构成图 G。当 N 和 M 都是大于 1 的奇数时，给出一种哈密顿回路的构造方法，或证明此时 G 没有哈密顿回路。**【提示: 考虑二部图的性质】**

Problem 6

一个每个内点的孩子都恰好是 m 个的树 T 有 81 个树叶并且高度为 4。

1. 给出 m 的上界和下界。

2. 若 T 还是平衡的，则 m 是多少?

Problem 7

标记树是其中每个顶点都指定了标记的树。当在两个标记树之间存在保持顶点标记的同构时，就称这两个标记树是同构的。用集合 3(即 $\{0,1,2\}$) 里不同的数来标记三个顶点的、非同构的标记树有多少种? 用集合 4 里不同的数来标记四个顶点的、非同构的标记树有多少种?

Problem 8

一棵树有 n_i 个度数为 i 的结点，$i=2,3,4,\cdots,k$，问它有多少个度数为 1 的结点?

Problem 9

设满二元树 T 的结点数为 n，证明 n 必为奇数，并求出叶节点数 t。

Problem 10

构造前序遍历为 $a, b, f, c, g, h, i, d, e, j, k, l$ 的有序根树，其中 a 有四个子女，c 有三个子女，j 有两个子女，b 和 e 都有一个子女，所有其他顶点都是树叶。