# 离散数学作业 2

## Problem 1

用推理规则证明：如果$\forall x(P(x) \vee Q(x))$和$\forall x(\neg Q(x) \vee S(x))$，$\forall x(R(x) \to \neg S(x))$和$\exists x \neg P(x)$为真，则$\exists x \neg R(x)$ 为真。

## Problem 2

用推理规则证明：如果$\forall x(P(x) \to (Q(x) \wedge S(x)))$和$\forall x(P(x) \wedge R(x))$为真，则$\forall x(R(x) \wedge S(x))$为真。

## Problem 3

证明$\neg \exists x \forall y P(x, y)$和$\forall x \exists y \neg P(x, y)$是逻辑等价的。

## Problem 4

用谓词逻辑表示费马大定理（$x^n + y^n = z^n$当$n > 2$时没有正整数解）。

## Problem 5

将下列命题符号化，并用推理规则证明结论的正确性。（设论域为全体人类。）

每个喜欢步行的人都不喜欢骑自行车；每个人或者喜欢骑自行车或者喜欢乘汽车；有的人不喜欢乘汽车。所以有的人不喜欢步行。

## Problem 6

证明如果$n$是整数，则下面的4个语句的等价的：

a) $n$是偶数。

b) $n+1$是奇数。

c) $3n+1$是奇数。

d) $3n$是偶数。

## Problem 7

证明任一个有理数和任一个无理数之间都有一个无理数。

## Problem 8

用消解法证明复合命题$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$不是可满足的。

## Problem 9

定义函数$\sigma(x)$的值为$x$的所有因子（包括自身）之和，其中$x \in N^+$。例如$\sigma(6) = 1+2+3+6 = 12$。
设正整数$n$的质因数分解式为$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots p_k^{a_k}$，证明$\sigma(n) = \sigma(p_1^{a_1}) \cdot \sigma(p_2^{a_2}) \cdot \ldots \sigma(p_k^{a_k})$。

## Problem 10

完美数是这样一些特殊的自然数，它所有的真因子（即除了自身以外的约数）之和恰好等于它本身。例如第一个完美数6，6的真因子有$1, 2, 3$，而$6 = 1+2+3$，所以6是一个完美数。前四个完美数分别是6、28、496、8128。由于已知的完美数都是偶数，人们好奇是否有奇完美数的存在。

17世纪，法国数学家笛卡尔提出了一个猜想：如果奇完美数存在，那么它应该符合$pM^2$的形式，其中$p$是一个质数，$M$是一个正整数。也就是说如果奇完美数存在，那它应该能写成一个质数和一个平方数的乘积。

遗憾的是，笛卡尔并没有证明上述猜想的正确性。百年后，大数学家欧拉证明了奇完美数确实符合一个类似的形式$p^{2k+1}M^2$，即奇完美数若存在，能写成一个质数的奇次方和一个平方数的乘积。也是在他的证明中，他首先定义了Problem 9中的$\sigma(x)$函数。

尝试复现一下大数学家欧拉的证明吧。（提示：若$N$为奇完美数，有$\sigma(N) = 2N$，对$N$作质因数分解代入$\sigma$后考虑奇偶性）。