

离散数学作业 3

Problem 1

如果集合 A, B, C 满足下述条件, 是否能判断 $A = B$, 给出证明或反例。

a) $A \cup C = B \cap C$

b) $A \cap C = B \cap C$

c) $A \cup C = B \cup C$ 并且 $A \cap C = B \cap C$

Problem 2

给出以下各个谓词的真值集合, 这里的域是整数集合。

a) $P(x) : x^2 < 3$

b) $P(x) : x^3 \geq 1$

c) $P(x) : 2x + 1 = 0$

d) $P(x) : x^2 = 2$

Problem 3

求出下列集合的幂集。

a) $\{a, b, c\}$

b) $\{\{1\}, \emptyset, 1\}$

c) \emptyset

d) $\{\emptyset\}$

Problem 4

基于冯·诺依曼定义下的自然数 (ppt lec4 15页), 我们可以进一步定义自然数的加法和乘法如下:

$$1) m + 0 = m, \quad m + n^+ = (m + n)^+$$

$$2) m \cdot 0 = 0, \quad m \cdot n^+ = (m \cdot n) + m$$

请以此为基础验证以下算式:

$$a) 1 + 1 = 2$$

$$b) 2 \cdot 3 = 6$$

Problem 5

验证以下关于集合笛卡尔积的算式是否成立, 给出证明或反例。

$$a) (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

$$b) (A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$$

Problem 6

判断下列 \mathbb{R} 上的关系是否是 \mathbb{R} 到 \mathbb{R} 的函数。如果是函数, 进一步判断是否是单射、满射、双射的一种。

$$a) \{(a, b) | b = -3a + 4\}$$

$$b) \{(a, b) | b = (a + 1)/(a + 2)\}$$

$$c) \{(a, b) | b = -a^2 + 2a + 4\}$$

$$d) \{(a, b) | b = 5a^3 + 3a^2 - 2a + 1\}$$

Problem 7

设 f 是 A 到 B 的双射, g 是 B 到 C 的双射, 证明 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 。

Problem 8

记 $\complement_A B$ 表示 B 相对于 A 的补集, 即 $\complement_A B = A - B$ 。

令 f 为从 A 到 B 的函数。 S 为 B 的子集。证明 $f^{-1}(\complement_B S) = \complement_A f^{-1}(S)$ 。

Problem 9

A 是一个集合, 假设 A 上任意函数 $f : A \rightarrow A$ 都有逆函数 f^{-1} , 问 A 中可能含有几个元素?

Problem 10

现有函数 $f : A \rightarrow B$ 和函数 $g : B \rightarrow A$ 使得 $g \circ f = \iota_A$, 其中 ι_A 是 A 上的恒等函数。证明 f 是单射函数, g 是满射函数。