

离散数学作业 4

Problem 1

计算下列集合的基数。

(1) $A = \{x, y, z\}$

(4) $B \cap C$

(2) $B = \{x \mid x = n^2 \wedge n \in N\}$

(5) $B \cup C$

(3) $C = \{x \mid x = n^{109} \wedge n \in N\}$

(6) 平面上所有的圆心在 x 轴上的单位圆的集合.

Problem 2

判断下列各集合是有限的，可数无限的，还是不可数的。对那些可数无限集合，给出自然数集到该集合的双射。

a) 大于10的整数

d) 0和2之间的实数

b) 奇负整数

e) $\{2, 3\} \times Z^+$

c) 绝对值小于1 000 000的整数

f) 10 的整数倍

Problem 3

证明：任意两个可数集的并集仍然是可数集。

Problem 4

令集合 S 为 N 的所有有限子集组成的集合，即 $S = \{A \subset N \mid A \text{ is finite}\}$ 。证明 S 是可数的。

Problem 5

证明: $R^N \approx R$ 。

Problem 6

设 a, b, c, d 均为正整数, 下列命题是否为真? 若为真, 给出证明; 否则, 给出反例。

1) 若 $a \mid c, b \mid c$, 则 $ab \mid c$ 。

3) 若 $a \mid c, b \mid d$, 则 $ab \mid cd$ 。

2) 若 $ab \mid c$, 则 $a \mid c$ 。

4) 若 $a \mid bc$, 则 $a \mid b$ 或 $a \mid c$ 。

Problem 7

计算以下同余算式。

a) $23300 \pmod{11}$

b) $2^{3300} \pmod{31}$

c) $3^{516} \cdot 5^{217} \pmod{7}$

Problem 8

证明: 对于任意的整数 n , $6 \mid n(n+1)(n+2)$ 。

Problem 9

证明: 存在无穷多个 n 使得 $\phi(n) > \phi(n+1)$ 。

Problem 10

证明: 对于任意整数 $n > 1$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 不是整数。