离散数学作业 5

Problem 1

问题：
设 $P(n)$ 是命题：$n! < n^n$，其中 n 是大于 1 的整数。

a) 命题 $P(2)$ 是什么？

b) 证明 $P(2)$ 为真，完成基础步骤的证明。

c) 归纳假设是什么？

d) 在归纳步骤中你需要证明什么？

e) 完成归纳步骤。

f) 解释为什么只要 n 是一个大于 1 的整数，则上述步骤就可以证明不等式为真。

Problem 2

用强归纳法证明：对于任意自然数 n，存在自然数 a, b 满足：$5^n = a^2 + b^2$。

Problem 3

使用良序性证明：$\sqrt{2}$ 是无理数。(提示：假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，则存在整数 p, q 满足 $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$，同时可以得到 $\frac{2q-p}{p-q} = \sqrt{2}$)

Problem 4

a) 给出计算位串 s 中 1 的个数的函数 $ones(s)$ 的递归定义。

b) 用结构归纳法证明 $ones(s \cdot t) = ones(s) + ones(t)$。(其中 $s \cdot t$ 表示位串 s 和位串 t 的连接)

Problem 5

设 a 与 b 为正整数，并设 Q 的递归定义如下所示：

$$Q(a,b) = \begin{cases} 0, & a < b \\ Q(a-b,b)+1, & b \leq a \end{cases}$$

a) 求：(1)$Q(2,5)$;(2)$Q(12,5)$。

b) 函数 Q 的用处是什么？求 $Q(5861,7)$。

Problem 6

长度为 n（n> 5）且以 000 开始或以 111 结尾的二进制串有多少个?

Problem 7

使用数学归纳法证明容斥原理。

Problem 8

如果有 8 种不同的课程可供选择，每个学生必须选择 5 门课程来完成他/她的学习计划。那么最少有多少名学生，使得不管他们如何选择，至少有 10 名学生的学习计划相同?

Problem 9

一所学校的数学系有 7 名女教师和 9 名男教师。

a) 有多少种方式从中选出 5 人的委员会并使其中包含至少 1 名女教师?

b) 有多少种方式从中选出 5 人的委员会并使其中包含至少 1 名女教师和至少 1 名男教师。

Problem 10

一个新月形面包店有普通新月形面包、樱桃新月形面包、巧克力新月形面包、杏仁新月形面包、苹果新月形面包和椰菜新月形面包。有多少种选择方式

a) 12 个新月形面包?

b) 36 个新月形面包?

c) 24 个新月形面包，并且至少每类有 2 个?

d) 24 个新月形面包，并且不超过 2 个椰菜的?

e) 24 个新月形面包，并且至少 5 个巧克力的且至少 3 个杏仁的?

f) 24 个新月形面包，并且至少 1 个普通的，至少 2 个樱桃的，至少 3 个巧克力的，至少 1 个杏仁的，至少 2 个苹果的和不超过 3 个椰菜的?