

离散数学作业 6

Problem 1

集合 $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$, 试证明: 如果从集合 A 中随机选择 7 个数, 那么总能找到其中的 2 个数相加为 15。

Problem 2

一个碗里有 10 个红球和 10 个蓝球。一个女士不看着球而随机地选取。

- a) 她必须选多少个球才能保证至少有 3 个球是同色的?
- b) 她必须选多少个球才能保证至少有 3 个球是蓝色的?

Problem 3

一个把信放入信袋的机器发生了故障并且随机把信放入信袋中。在一组 100 封信中发生下面事件的概率是多少?

- a) 没有信放对了信袋。
- b) 恰好 99 封信放对了信袋。
- c) 恰好 1 封信放对了信袋。
- d) 所有的信都放对了信袋。
- e) 恰好 98 封信放对了信袋。

Problem 4

假设从一副 52 张的扑克牌中随机选两张牌。

1. 如果扑克牌同时抽取, 那么两张牌都是奇数并且不是黑色的概率是多少?
2. 如果一个扑克牌抽完之后将其放回再抽取第二张, 那么两张牌都是奇数并且不是黑色的概率是多少?

Problem 5

对于一个有子女的家庭，考虑以下事件：

$A = \{\text{有男有女}\}$ ， $B = \{\text{至多一个男孩}\}$ ，

- a) 如果该家庭有三个孩子，那么事件 A 与 B 独立吗，为什么？
- b) 如果该家庭只有两个孩子，那么事件 A 与 B 独立吗，为什么？

Problem 6

普通人有 4% 的概率感染禽流感病毒，此外，假定对给定的禽流感血液检测，感染了禽流感的人中有 97% 的人禽流感检测呈阳性，没感染禽流感的人中有 2% 的人禽流感检测呈阳性。那么，下列概率是多少??

- a) 禽流感检测呈阳性的人真的感染了禽流感病毒。
- b) 禽流感检测呈阳性的人没有感染禽流感病毒。
- c) 禽流感检测呈阴性的人感染了禽流感病毒。
- d) 禽流感检测呈阴性的人没有感染禽流感病毒。

Problem 7

Remesh 可以通过 3 种不同的方式去工作：骑自行车、开车或坐公共汽车。由于上班族引起的交通繁忙，他若开车上班，则有 50% 的可能迟到。他若坐公共汽车上班，公共汽车可以走一条专门为公共汽车行驶的路线，那他有 20% 的可能迟到。他骑车上班只有 5% 的可能迟到。Remesh 有一天迟到了。他的老板想估计他那天开车上班的概率。

- a) 假定老板假设 Remesh 以 $1/3$ 的可能采用 3 种方法中的任何一种方法来上班。在此假设下，根据贝叶斯定理，Remesh 开车来上班概率估计是多少？
- b) 假定老板知道 Remesh 开车的可能性有 30%，坐公共汽车上班的可能性有 10%，骑自行车的可能性有 60%。利用这些信息，根据贝叶斯定理，Remesh 开车来上班的概率估计是多少？

Problem 8

当一个均匀的骰子被掷 10 次时，出现 6 点的次数的方差是多少？

Problem 9

某一随机样本为从 1 到 3 中随机选取两个数，允许重复，于是，可以产生如下所示 9 个元素等概率样本空间： $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ 。

- a) 令 X 为两数之和，求 X 的分布和期望 $E(X)$ 。
- b) 令 Y 为两数之中较小值，求 Y 的分布和期望 $E(Y)$ 。

Problem 10

一个工业产品以 20 个产品为一个批次出货。由于测试每件产品确定是否有缺陷比较昂贵，因此制造商常常选择抽样测试。要求从每批出货中抽取 5 件产品，并且如果观察到一个以上的次品则拒绝批次。如果批次中包含 4 件次品，它会被拒绝的概率是多少？采样中次品数量的期望是多少？采样中次品数量的方差是多少？