

离散数学作业 7

Problem 1

确定所有 Web 页上的关系 R 是否为自反的, 对称的, 反对称的和传递的, 其中 $(a, b) \in R$ 当且仅当:

- a) 每个访问 Web 页 a 的人也访问了 Web 页 b
- b) 在 Web 页 a 和 b 上没有公共链接
- c) 在 Web 页 a 和 b 上至少有一条公共链接
- d) 存在一个 Web 页包含了到 Web 页 a 和 Web 页 b 的链接

Problem 2

设 R 是从集合 A 到集合 B 的关系。从集合 B 到集合 A 的逆关系, 记作 R^{-1} , 是有序对 $\{(b, a) | (a, b) \in R\}$ 的集合, 补关系 \bar{x} 是有序对 $\{(a, b) | (a, b) \notin R\}$ 的集合。

证明: 集合 A 上的关系 R 是自反的当且仅当其逆关系 R^{-1} 是自反的。

Problem 3

设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的关系, 由以下矩阵表示。

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

求表示下述关系的矩阵。

a) $R_1 \cup R_2$

b) $R_1 \cap R_2$

c) $R_2 \circ R_1$

d) $R_1 \circ R_1$

e) $R_1 \oplus R_2$

Problem 4

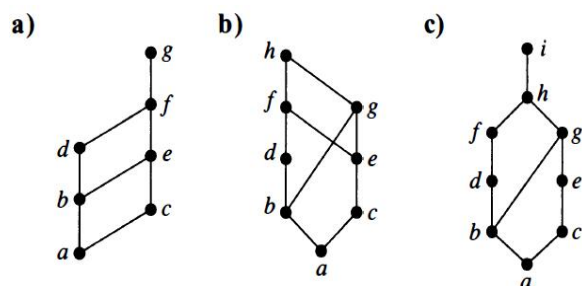
设 R 是定义在正整数的有序对构成的集合上的关系, $((a, b), (c, d)) \in R$ 当且仅当 $a + d = b + c$ 。证明 R 是等价关系。

Problem 5

设 A 为所有长度至少为 3 的二进制串的集合, 定义 A 上的二元关系 $R: xRy$ 表示串 x 与串 y 的前三位相同。证明 R 为等价关系。

Problem 6

确定具有下面哈赛图的偏序集是否为格。



Problem 7

考虑集合 $A = \{a, b, c\}$ 上的关系 $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, c)\}$, 求: $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 。

Problem 8

使用沃舍尔算法找出下面 $\{a, b, c, d, e\}$ 上的关系的传递闭包

a) $\{(a, c), (b, d), (c, a), (d, b), (e, d)\}$

b) $\{(b, c), (b, e), (c, e), (d, a), (e, b), (e, c)\}$

- c) $\{(a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b), (d, a), (e, d)\}$
d) $\{(a, e), (b, a), (b, d), (c, d), (d, a), (d, c), (e, a), (e, b), (e, c), (e, e)\}$

Problem 9

对偏序集 $(\{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}, \subseteq)$, 回答下述问题。

- 求极大元素。
- 求极小元素。
- 存在最大元素吗? 如果存在请求出。
- 存在最小元素吗? 如果存在请求出。
- 求 $\{\{2\}, \{4\}\}$ 的所有上界。
- 如果存在的话, 求 $\{\{2\}, \{4\}\}$ 的最小上界。
- 求 $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ 的所有下界。
- 如果存在的话, 求 $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ 的最大下界。

Problem 10

证明: 一个有穷非空偏序集有一个极大元素。