离散数学作业 8

Problem 1

判断下列集合对所给的二元运算是否封闭：

a) 整数集合Z和普通的减法运算。

b) 全体$n \times n$实可逆矩阵集合关于矩阵加法和乘法运算，其中$n \geq 2$。

c) 正实数集合R^+和$\circ$运算，其中$\circ$运算定义为：

$$\forall a，b \in R^+，a \circ b = ab - a - b$$

d) $n \in Z^+$，$nZ = \{nz|z \in Z\}$，nZ关于普通加法和乘法运算。

e) $S = \{0，1\}$，S关于普通加法和乘法运算。

f) $S = \{x|x = 2^n，n \in Z^+\}$，$S$关于普通的加法和乘法运算。

Problem 2

R为实数集，定义以下R上的二元运算：

$f_1 : (x, y) = x + y$

$f_2 : (x, y) = x - y$

$f_3 : (x, y) = x \cdot y$

$f_4 : (x, y) = max(x, y)$

$f_5 : (x, y >) = min(x, y)$

$f_6 : (x, y) = |x - y|$

1) 对每个二元运算，说明是否为可交换、可结合、幂等的。

2) 求每个二元运算，求单位元、零元、任意可逆元素a的逆元(若存在)。

Problem 3

设$S = \{f | f$是$[a, b]$上的连续函数$\}$，其中$a, b \in R, a < b$。
问S关于下面的运算是否构成代数系统？如果能构成代数系统，说明该运算是否满足交换性和结合性，并求出单位元和零元（若存在）。

a) 函数加法：$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

b) 函数减法：$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

c) 函数乘法：$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

d) 函数除法：$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$

Problem 4

判断下列集合关于指定的运算是否构成半群，幺半群和群：

a) a是正实数，$G = \{a^n | n \in Z\}$，运算是普通乘法。

b) Q^+为正有理数，运算是普通乘法。

c) 一元实系数多项式的集合关于多项式的加法。

d) 一元实系数多项式的集合关于多项式的乘法。

Problem 5

设$V =< \{a, b\}, * >$是半群，且$a * a = b$，证明：

a) $a * b = b * a$

b) $b * b = b$

Problem 6

证明：对任意质数p，$\{1, 2, \ldots, p-1\}$对于模p意义下的乘法运算（即$a \circ b = ab \pmod p$）构成群。

Problem 7

设H是群G的子群, $x \in G$, 令$xHx^{-1} = \{xhx^{-1}|h \in H\}$,证明$xHx^{-1}$也是$G$的子群,称为$H$的共轭子群。

Problem 8

设H和K分别为群G的r, s阶子群，若r与s互素，证明$H \cap K = \{e\}$.

Problem 9

证明：若G中只有一个2阶元，则这个2阶元一定与G中所有元素可交换。

Problem 10

设G是n阶有限群，从中任取n个元素$a_1, a_2, \ldots, a_n$（可重复），证明存在正整数$1 \leq p \leq q \leq n$使得$\prod_{i=p}^{q} a_i = e$。