

# 离散数学作业 9

## Problem 1

证明循环群一定是阿贝尔群；说明阿贝尔群是否一定是循环群，证明结论或给出反例。

## Problem 2

设 $m$ 整除 $n$ ，证明 $n$ 阶循环群 $G = \langle a \rangle$ 中的方程 $x^m = e$ 恰有 $m$ 个解。

## Problem 3

设 $a, b$ 分别为群 $G$ 中的 $m, n$ 阶元素，且满足 $ab = ba, \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$ 。  
证明： $ab$ 的阶为 $lcm(a, b)$ 。

## Problem 4

图1 给出了6个偏序集的哈斯图。判断其中哪些是格。如果是格，给出其中元素的补元（若存在）；如果不是格，请说明理由。

## Problem 5

设 $\langle L, \preceq \rangle$ 是格，任取 $a \in L$ ，令 $S = \{x | x \in L \wedge x \preceq a\}$ 。  
证明： $\langle S, \preceq \rangle$ 是 $L$ 的子格。

## Problem 6

设 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 是有限格， $g$ 是 $L$ 到 $L$ 的满射。  
证明：若对任意 $a, b \in L$ 有 $g(a \wedge b) = g(a) \wedge g(b)$ ，则必存在 $e \in L$ 使得 $g(e) =$

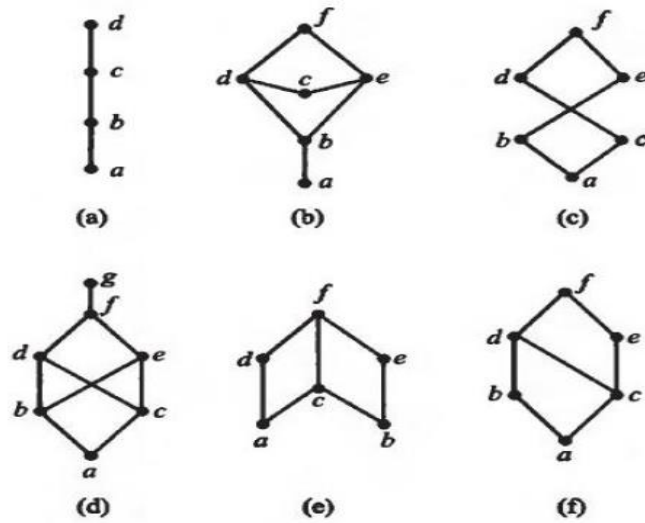


图 1: 哈斯图

$e$ 。

### Problem 7

用布尔代数定义证明不存在3个元素的布尔代数。

### Problem 8

设  $B$  是布尔代数,  $\forall a, b \in B$ 。

证明:  $a \preceq b \Leftrightarrow a \wedge b' = 0 \Leftrightarrow a' \vee b = 1$ 。

### Problem 9

设  $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$  是布尔代数, 在  $B$  上定义二元运算  $\oplus$ ,  $\forall x, y \in B$  有

$$x \oplus y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$$

问  $\langle B, \oplus \rangle$  能否构成代数系统? 如果能, 指出是哪一种代数系统. 为什么?

### Problem 10

设  $B$  为布尔代数,  $u, v, w, x \in B$  满足  $w \vee x = u$  且  $w \wedge x = v$ 。

证明:  $x = v \vee (u \wedge w')$ 。