离散概率

回顾

- 内容1：容斥原理
  - $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$
- 内容2：鸽笼原理
  - n 只鸽子放到 m 个笼子中，且 $m<n$，则至少有一个笼子要装2个或多个
- 内容3：排列与组合
  - 组合与二项式定理、组合计数方法、圆排列、不可区分物的排列、是否允许重复等

本节提要

- 内容1：概率论
- 内容2：贝叶斯定理
- 内容3：随机变量及其期望与方差

例：生日问题

- 有k个人，设每个人的生日是365天的任何一天是等可能的，求至少两人生日相同的概率。

解：令$E=\{$至少两人生日相同$\}$，则

$\overline{E}=\{k$个人生日均不同$\}$.

显然，$Pr(\overline{E})=\frac{(365)_k}{365^k}$.

故$Pr(E)=1-Pr(\overline{E})=1-\frac{(365)_k}{365^k}$.

例：生日问题

$$Pr(E) = 1 - Pr(\overline{E}) = 1 - \frac{(365)_k}{365^k}$$

人数	概率
20	0.411
23	0.507
30	0.706
40	0.891
50	0.970
60	0.994
100	0.999999

概率定义

- 定义：可数样本空间 $\mathcal{S}$ 乃一个可数集合。
  - $\mathcal{S}$ 的每一个元素 ω 称为一个结果。
- 定义：满足下列条件的函数 $\Pr: \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ 称为样本空间 $\mathcal{S}$ 上的一个概率函数：
  - $\forall_{\omega \in \mathcal{S}} \Pr[\omega] \geq 0$，且
  - $\sum_{\omega \in \mathcal{S}} \Pr[\omega] = 1.$
- 定义：$\mathcal{S}$ 的一个子集 $E \subseteq \mathcal{S}$ 称为一个事件。
  - 事件 ***E*** 的概率 $\Pr[E] ::= \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega]$

概率性质

- 定理 1：设 E 是样本空间 $\mathcal{S}$ 中的一个事件，事件 $\bar{E}$（事件 E 的补事件）的概率为：

$$\Pr[\bar{E}] = 1 - \Pr[E]$$

- 定理 2：设 E_1 和 E_2 是样本空间 $\mathcal{S}$ 中的事件，那么：

$$\Pr[E_1 \cup E_2] = \Pr[E_1] + \Pr[E_2] - \Pr[E_1 \cap E_2]$$

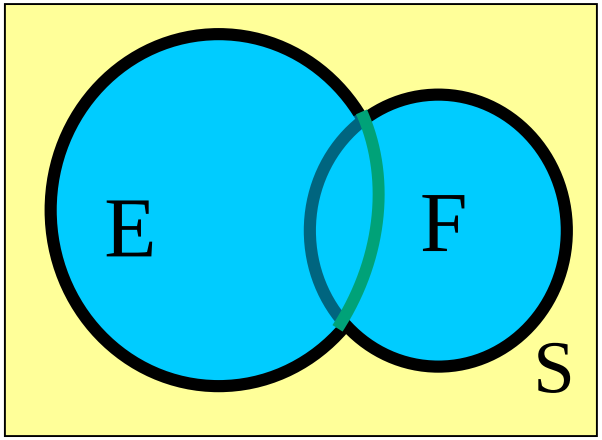
均匀分布

- 定义：假设S是一个含 ***n*** 个元素的样本空间. 均匀分布 (**uniform distribution**) 赋给 S 中每个结果 **1/*n*** 的概率.
  - 举例：对于均匀的硬币 $\Pr[H] = \Pr[T] = \frac{1}{2}$
  - 举例：公平的骰子 $\Pr[X] = \frac{1}{6}$， $X = 1 \cdots 6$
- 均匀分布下事件的概率可通过对其中的元素计数求得

条件概率与独立性

- 条件概率定义：设E和F是事件,且$\Pr[F] > 0$. E在给定 F条件下的概率, 记作$\Pr[E \mid F]$, 定义为

$$\Pr[E \mid F] ::= \frac{\Pr[E \cap F]}{\Pr[F]}$$



- 独立性定义：事件**E**和**F**是独立的，当且仅当

$$\Pr[E \cap F] = \Pr[E]\Pr[F]$$

例

- 在至少有一个男孩的条件下，有两个孩子的家庭正好均是男孩的条件概率？假设**BB, BG, GB,** 和**GG**是等可能的。

解: 令E是家庭有两个男孩的事件，F是家庭至少有一个男孩的事件。我们有E = {BB}, F = {BB, BG, GB}, $E \cap F$ = {BB}.

- $p(F) = 3/4$ ， $p(E \cap F) = 1/4$.
- 因此， $p(E|F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$

例

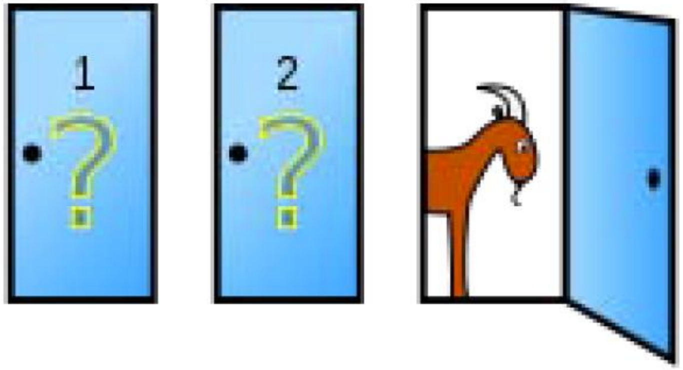
- 一个有两个孩子的家庭有四种情形 (BB, GG, BG, GB)，假设是等可能的。事件E是两个孩子的家庭有两个男孩，事件F是两个孩子的家庭至少有一个男孩。事件E和F是否独立?

解: $p(E) = 1/4, p(F) = 3/4$ ， $p(E \cap F)=1/4,$

$p(E)\, p(F)= 3/16 \neq 1/4= p(E \cap F)$. E和F不是独立的.

例：三门问题

蒙蒂·霍尔游戏(电视节目, Monty Hall Puzzle)



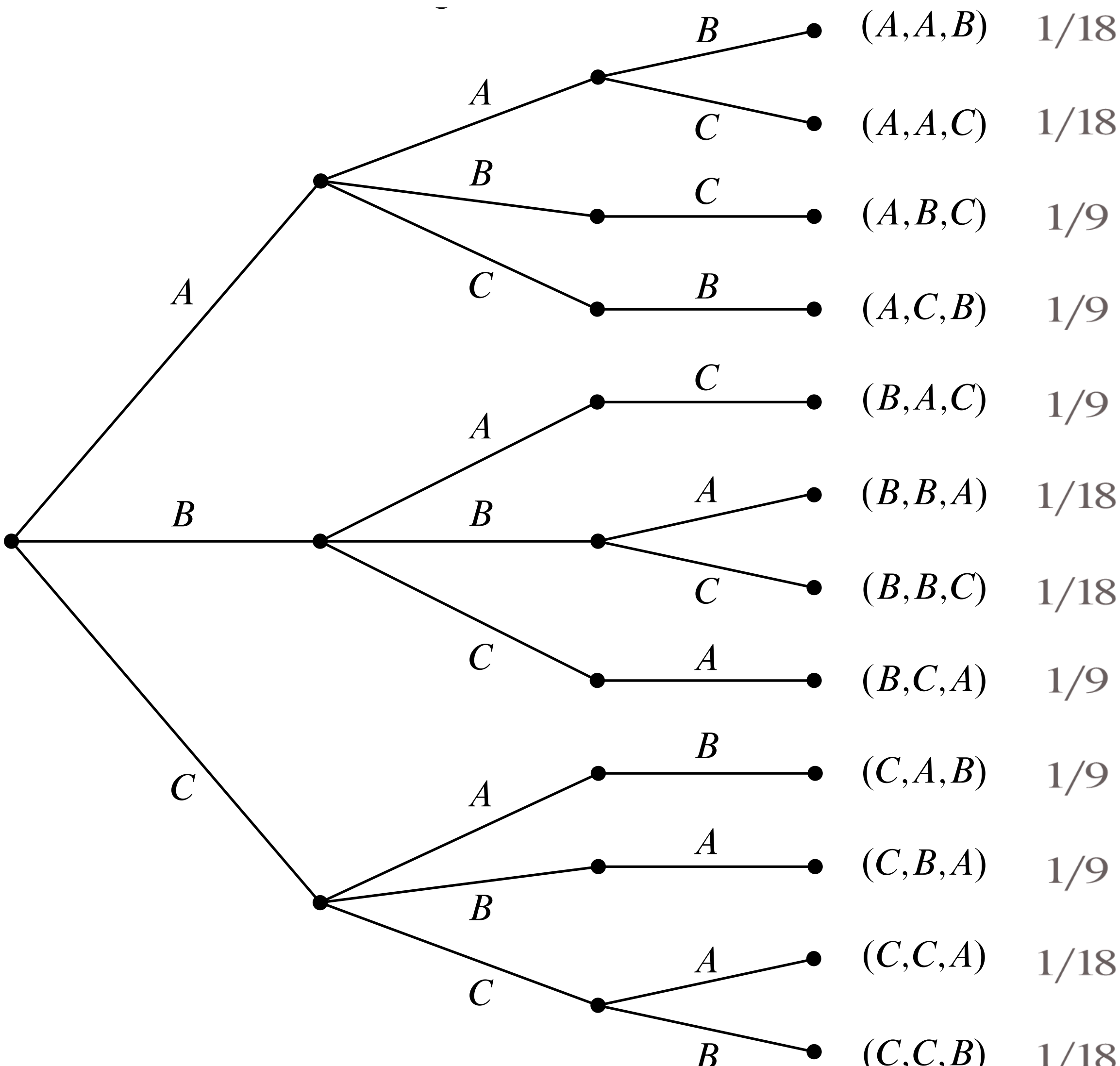
1/3 （总是不变）

2/3 （总是改变）

例：三门问题

- 假设你正在参加一个有奖游戏。
  - 你被要求在三扇门中选择一扇，其中一扇后面有一辆车，其余两扇后面则是山羊；
  - 你选择了一道门；
  - 然后知道门后面有什么的主持人，开启了另一扇后面有山羊的门。
  - 他然后问你：“你想改变主意而选择剩下来的这个门吗？”
- 问题是：改变选择对你来说有利吗？

例：三门问题



定义随机实验结果为(车在哪个门后,开始选哪个门,主持人开哪门)

$\Pr[\text{改变选择而赢}]$
$= \Pr[(A,B,C)] +$
$\Pr[(A,C,B)] + \Pr[(B,A,C)] +$
$\Pr[(B,C,A)] +$
$\Pr[(C,A,B)] + \Pr[(C,B,A)]$
$= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$
$= \frac{2}{3}$

本节提要

- 内容1：概率论
  - 概率函数、条件概率、独立性
- 内容2：贝叶斯定理
- 内容3：随机变量及其期望与方差

贝叶斯定理

- 设 E 和 F 是样本空间 S 中的事件，$\Pr[E] \neq 0$, $\Pr[F] \neq 0$, 则

$$\Pr[F \mid E] = \frac{\Pr[E|F]\Pr[F]}{\Pr[E]}$$

$$= \frac{\Pr[E|F]\Pr[F]}{\Pr[E|F]\Pr[F]+\Pr[E|\bar{F}]\Pr[\bar{F}]}$$

贝叶斯定理的推导

- 由条件概率定义

$$\Pr[F \mid E]\Pr[E] = \Pr[F \cap E]$$
$$= \Pr[E \cap \mathrm{F}] = \Pr[E \mid F]\Pr[F]$$

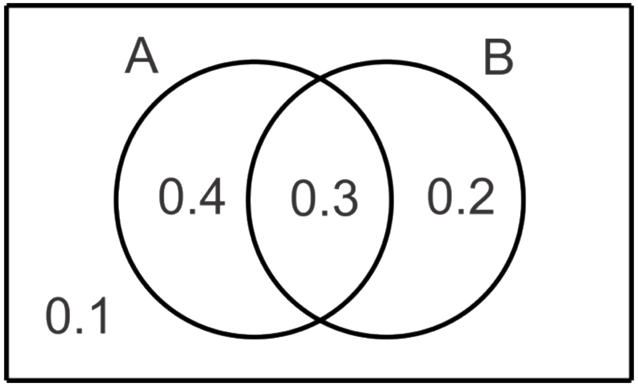
- 又

$$\Pr[E] = \Pr[(E \cap F) \cup (E \cap \bar{F})]$$
$$= \Pr[(E \cap F)] + \Pr[(E \cap \bar{F})]$$
$$= \Pr[E \mid F]\Pr[F] + \Pr[E \mid \bar{F}]\Pr[\bar{F}]$$

贝叶斯定理

- 一些常用说法
  - $\Pr[A]$ 是 A 的先验概率。之所以称为“先验”是因为它不考虑任何 B 方面的因素。
  - $\Pr[A \mid B]$ 是已知 B 发生后 A 的条件概率或后验概率。
  - $\Pr[B \mid A]$ 是已知 A 发生后 B 的条件概率或后验概率。
  - $\Pr[B]$ 是 B 的先验概率，也作标准化常量（**normalizing constant**）。

$$\Pr[A \mid B] = \frac{\Pr[B \mid A]\Pr[A]}{\Pr[B]}$$



贝叶斯定理的应用

- 假设有一种罕见的疾病，100,000人只有1人会得这种病。如果某人得了此病，检测准确率高达99%；如果某人没有得此病，检测准确率为99.5%.
  - 疾病检测呈阳性，得此病的概率多大?
  - 疾病检测呈阴性，没有得此病的概率多大?

解：设D是此人得此病的事件，E是疾病检测呈阳性的事件。需要计算 $\Pr[\mathrm{D} \mid E], \Pr[\overline{D} \mid \overline{E}]$ 。

贝叶斯定理的应用（续）

- $\Pr[D] = \frac{1}{100000} = 0.00001$, $\Pr[\bar{D}] = 1 - \Pr[D] = 0.99999$
- $\Pr[E \mid D] = 0.99$, $\Pr[\bar{E} \mid D] = 0.01$,
  $\Pr[E \mid \bar{D}] = 0.005$, $\Pr[\bar{E} \mid \bar{D}] = 0.995$

$$\Pr[D \mid E] = \frac{\Pr[E|D]\Pr[D]}{\Pr[E|D]\Pr[D] + \Pr[E|\bar{D}]\Pr[\bar{D}]}$$

$$= \frac{0.99 \times 0.00001}{0.99 \times 0.00001 + 0.005 \times 0.99999}$$

$$\approx 0.002$$

呈阳性，也不必太担心！

贝叶斯定理的应用（续）

$$\Pr[\,\overline{D} \mid \overline{E}\,] = \frac{\Pr[\bar{E}|\overline{D}]\Pr[\overline{D}]}{\Pr[\bar{E}|\overline{D}]\Pr[\overline{D}]+\Pr[\bar{E}|D]\Pr[D]}$$

$$= \frac{0.995\times 0.99999}{0.995\times 0.99999+0.01\times 0.00001}$$

$$\approx 0.9999999$$

$$\Pr[\,D \mid \overline{E}\,] = 1 - \Pr[\,\overline{D} \mid \overline{E}\,] = 0.0000001$$

呈阴性，高枕无忧！

本节提要

- 内容1：概率论
  - 概率函数、条件概率、独立性
- 内容2：贝叶斯定理
  - $\Pr[F \mid E] = \frac{\Pr[E|F]\Pr[F]}{\Pr[E]}$
- 内容3：随机变量及其期望与方差

随机变量

- 定义：一个随机变量(random variable)是从样本空间到实数集的一个函数，也就是对每个可能结果指派一个实数
  - 随机变量是一个函数,不是一个变量

注：
- 许多试验结果都跟数值相关，即使不相关也可以转变过来
- 引入随机变量后，可以利用随机变量来描述随机现象，对事件及事件概率的研究扩大为对随机变量及其取值规律的研究；可以使用更多的数学工具，比如二项分布的均值和方差

随机变量

- 抛一枚骰子，令X＝出现的点数，则X是一r.v.
  - X的取值为1,2,3,4,5,6
  - $\{X \le 4\}$表示事件：点数不超过4
  - $\{X为偶数\}$表示事件：点数为偶数
- 设离散型随机变量X的所有可能取值为

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

并设$P(X = x_n) = p_n \ (n = 1, 2, \dots)$，

则称上式为X的分布律，常表示为

X	x_1	x_2	$\cdots,$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots,$	p_n	$\cdots$

二项分布

- 若随机变量X的分布律为

$$P(X=i)=C(n,i)p^i(1-p)^{n-i}, i=0,1,\dots,n$$

则称X服从参数为n,p的二项分布(其中n为自然数，$0\leq p\leq 1$为参数),记作

$$X\sim B(n,p)$$

随机变量的分布完整刻画了一个随机变量

例

- 假设一个硬币被掷3次. 令X(t)是头像在结果t中出现的次数。那么随机变量X(t)取值如下

$$X(HHH)=3,\ X(TTT)=0,$$
$$X(HHT)=X(HTH)=X(THH)=2,$$
$$X(TTH)=X(THT)=X(HTT)=1.$$

- 因此，X(t)的(概率)分布为

$$p(X=3)=1/8,$$
$$p(X=2)=3/8,$$
$$p(X=1)=3/8,$$
$$p(X=0)=1/8.$$

例

- 假设姚明罚球的命中率为0.9，求他两次独立罚球命中次数X的分布。

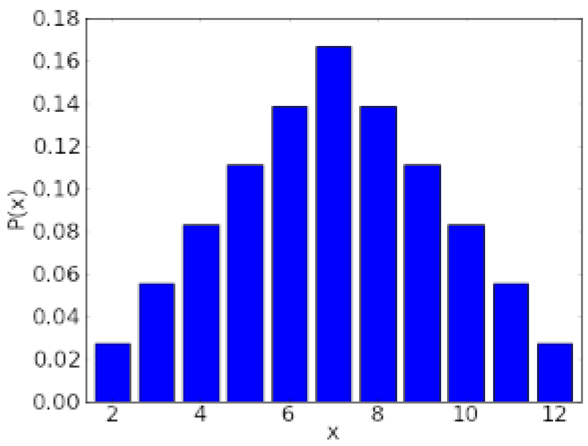
解：X的取值为0,1,2.

$$P(X=0)=(1-0.9)\times(1-0.9)=0.01$$
$$P(X=1)=2\times 0.9\times(1-0.9)=0.18$$
$$P(X=2)=0.9\times 0.9=0.81$$

X	0	1	2
P	0.01	0.18	0.81

随机变量分布特征的刻画

- 如何刻画随机变量取值分布的整体特征?
  - “平均”取值?
    - 当以概率加权之
  - “离散”程度?
    - 当以平均取值为基准，考虑偏差程度



期望值

- 定义：对于定义在样本空间 $\mathcal{S}$ 上的一个随机变量 X，其**期望值**为
  - 以概率加权的随机变量平均取值

$$\mathrm{Ex}[X] = \sum_{\omega \in \mathcal{S}} X(\omega)\Pr[\omega]$$

$X(\omega) - \mathrm{Ex}[X]$ 称为 X 在 ω 处的偏差**(deviation)**

例

- 例：求扔一个骰子所得点数的期望值。

$$\mathrm{Ex}[X]=\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot 3+\frac{1}{6}\cdot 4+\frac{1}{6}\cdot 5+\frac{1}{6}\cdot 6=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

- 例：扔三个硬币，求头面朝上硬币个数的期望值。

$$\begin{aligned}\mathrm{Ex}[X]=\frac{1}{8}[&X(HHH)+X(HHT)+X(HTH)+X(HTT)+\\&X(THH)+X(THT)+X(TTH)+X(TTT)]\\=&\frac{1}{8}(3+2+2+2+1+1+1+0)=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

例

- 例：求扔一个骰子所得点数的倒数的期望值。

$$\mathrm{Ex}\left[\frac{1}{X}\right]=\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{49}{120}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathrm{Ex}[X]}\neq\mathrm{Ex}\left[\frac{1}{X}\right]$$

例

例：求扔两个骰子所得点数之和的期望值

$\Pr[X=2]=\Pr[X=12]=\frac{1}{36}$

$\Pr[X=3]=\Pr[X=11]=\frac{1}{18}$

$\Pr[X=4]=\Pr[X=10]=\frac{1}{12}$

$\Pr[X=5]=\Pr[X=9]=\frac{1}{9}$

$\Pr[X=6]=\Pr[X=8]=\frac{5}{36}$

$\Pr[X=7]=\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ex}[X] &= 2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{1}{18}+4\cdot\frac{1}{12}+5\cdot\frac{1}{9}+6\cdot\frac{5}{36}+7\cdot\frac{1}{6}\\ &\quad+8\cdot\frac{5}{36}+9\cdot\frac{1}{9}+10\cdot\frac{1}{12}+11\cdot\frac{1}{18}+12\cdot\frac{1}{36}\\ &= 7.\end{aligned}$$

期望值的等价定义

- 定理：对于任意随机变量R

$$\operatorname{Ex}[R] = \sum_{x \in \operatorname{range}(R)} x \cdot \Pr[R = x]$$

Proof. Suppose R is defined on a sample space $\mathcal{S}$. Then,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ex}[R] &::= \sum_{\omega \in \mathcal{S}} R(\omega) \Pr[\omega] \\
&= \sum_{x \in \operatorname{range}(R)} \sum_{\omega \in [R=x]} R(\omega) \Pr[\omega] \\
&= \sum_{x \in \operatorname{range}(R)} \sum_{\omega \in [R=x]} x \Pr[\omega] && \text{(def of the event } [R = x]) \\
&= \sum_{x \in \operatorname{range}(R)} x \left(\sum_{\omega \in [R=x]} \Pr[\omega] \right) && \text{(factoring } x \text{ from the inner sum)} \\
&= \sum_{x \in \operatorname{range}(R)} x \cdot \Pr[R = x]. && \text{(def of } \Pr[R = x])
\end{aligned}$$

条件期望

- 给定一个随机变量R，R在已知事件A条件下的期望值是R在A中结果上的取值的概率加权平均值：

$$\mathrm{Ex}[R \mid A] = \sum_{r \in \mathrm{range}(R)} r \cdot \Pr[R = r \mid A]$$

例：已知一个公平骰子投出的点数不小于4点，此条件下投出的点数的期望值是多少？

$$\mathrm{Ex}[R \mid R \geq 4] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \Pr\left[R = i \mid R \geq 4\right]$$

全期望公式

Theorem 18.4.5 (Law of Total Expectation). *Let R be a random variable on a sample space $\mathcal{S}$, and suppose that $A_1, A_2, \ldots,$ is a partition of $\mathcal{S}$. Then*

$$\text{Ex}[R] = \sum_i \text{Ex}[R \mid A_i] \Pr[A_i].$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\text{Ex}[R] &= \sum_{r \in \text{range}(R)} r \cdot \Pr[R = r] && \text{(by 18.3)} \\
&= \sum_r r \cdot \sum_i \Pr\left[R = r \mid A_i\right] \Pr[A_i] && \text{(Law of Total Probability)} \\
&= \sum_r \sum_i r \cdot \Pr\left[R = r \mid A_i\right] \Pr[A_i] && \text{(distribute constant } r\text{)} \\
&= \sum_i \sum_r r \cdot \Pr\left[R = r \mid A_i\right] \Pr[A_i] && \text{(exchange order of summation)} \\
&= \sum_i \Pr[A_i] \sum_r r \cdot \Pr\left[R = r \mid A_i\right] && \text{(factor constant } \Pr[A_i]\text{)} \\
&= \sum_i \Pr[A_i] \, \text{Ex}[R \mid A_i]. && \text{(Def 18.4.4 of cond. expectation)}
\end{aligned}$$

例：Mean Time to Failure

- A computer program crashes at the end of each hour of use with probability p, if it has not crashed already. What is the expected time until the program crashes?

- $\mathrm{Ex}[C]$: C is the number of hours until the first crash
  A: the event that the system fails on the first step
  $\bar{A}$: the complementary event of A
  $$\mathrm{Ex}[C] = \mathrm{Ex}[C|A]\Pr[A] + \mathrm{Ex}[C|\bar{A}]\Pr[\bar{A}]$$
  $$\mathrm{Ex}[C|A] = 1$$
  $$\mathrm{Ex}[C|\bar{A}] = 1 + \mathrm{Ex}[C]$$

- $\mathrm{Ex}[C] = \frac{1}{p}$

期望的线性特性

- 定理：对于样本空间 $\mathcal{S}$ 上的一组任意的随机变量 X_i，$(i = 1,2,\ldots,n)$ 和任意实数 a, b，有
  - $\mathrm{Ex}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \mathrm{Ex}[X_1] + \mathrm{Ex}[X_2] + \cdots + \mathrm{Ex}[X_n]$
  - $\mathrm{Ex}[aX + b] = a\mathrm{Ex}[X] + b$

  - 由上述定理可知，扔两个骰子所得点数之和的期望值等于第一个骰子点数期望值与第二个骰子点数期望值之和，即 $7/2 + 7/2 = 7$.

例：猴子打字

一猴子在只含26个小写字母的键盘打字，每次均独立随机敲击一个键。如果该猴子敲击了10^6次键盘，问单词"proof"期望出现多少次？

解：定义指示随机变量X_i如下：

$$X_i = \begin{cases} 1 & i\text{到}i+4\text{个字母为proof} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

令X表示proof出现的次数，则$X = \sum_{i=1}^{10^6-4} X_i$.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{10^6-4} E(X_i) = \sum_{i=1}^{10^6-4} P(X_i = 1) = \frac{10^6-4}{26^5}$$

例：Expected Value in the Hatcheck Problem

- 负责寄存帽子的服务生把帽子搞乱了，只能随机发还。问他可以期望还对几个?
  - 令X_i = 1 若第 *i* 个客人拿到他的帽子；否则 = 0。

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$$\mathrm{Ex}[X_i] = 1 \cdot \Pr[X_i = 1] + 0 \cdot \Pr[X_i = 0] = \frac{1}{n}$$

$$\mathrm{Ex}[X] = \mathrm{Ex}[X_1] + \mathrm{Ex}[X_2] + \cdots + \mathrm{Ex}[X_n] = n \cdot \frac{1}{\mathrm{n}} = 1$$

独立随机变量

- 样本空间 S 上的随机变量 X 和 Y 若满足$\Pr[X = r_1 \text{且} Y = r_2] = \Pr[X = r_1] \cdot \Pr[Y = r_2]$, 则称它们相互独立。
  - 例：扔两个骰子，第一个骰子点数与第二个骰子点数二者是否独立?
  - 例：扔两个骰子，第一个骰子点数与两个骰子点数之和二者是否独立?

- 对于样本空间 S 上独立的随机变量 X 和 Y 有
  $\mathrm{Ex}[XY] = \mathrm{Ex}[X]\mathrm{Ex}[Y]$

方差

- 样本空间 $\mathcal{S}$ 上的随机变量X的方差**(variance)**

$$\mathrm{Var}[X] ::= \mathrm{Ex}[(X-\mathrm{Ex}[X])^2]$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Ex}[(X-\mathrm{Ex}[X])^2] = \sum_{\omega\in\mathcal{S}} (X(\omega)-\mathrm{Ex}[X])^2 \Pr[\omega]$$

  - 方差是随机变量X在ω处的偏差的平方的加权平均
  - $\sqrt{\mathrm{Var}[X]}$ 称为X的标准差 **(standard deviation)**
    记为 σ_X (或者$\sigma(X)$)

方差

- 定理：样本空间S上的随机变量**X**的方差

$$\mathrm{Var}[X] = Ex[X^2] - \mathrm{Ex}^2[X]$$

- 例：扔一个骰子所得点数的方差

$$\mathrm{Var}[X] = Ex[X^2] - \mathrm{Ex}^2[X]$$

$$= \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$= \frac{35}{12}$$

Bienaymé's formula

- 对于样本空间 S 上独立的随机变量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 有

$$\mathrm{Var}[X+Y]=\mathrm{Var}[X]+\mathrm{Var}[Y]$$

并可推广至 ***n*** 个两两相互独立的随机变量

$$\mathrm{Var}[X_1+X_2+\cdots+X_n]$$
$$=\mathrm{Var}[X_1]+\mathrm{Var}[X_2]+\cdots+\mathrm{Var}[X_n]$$

Bienaymé's formula

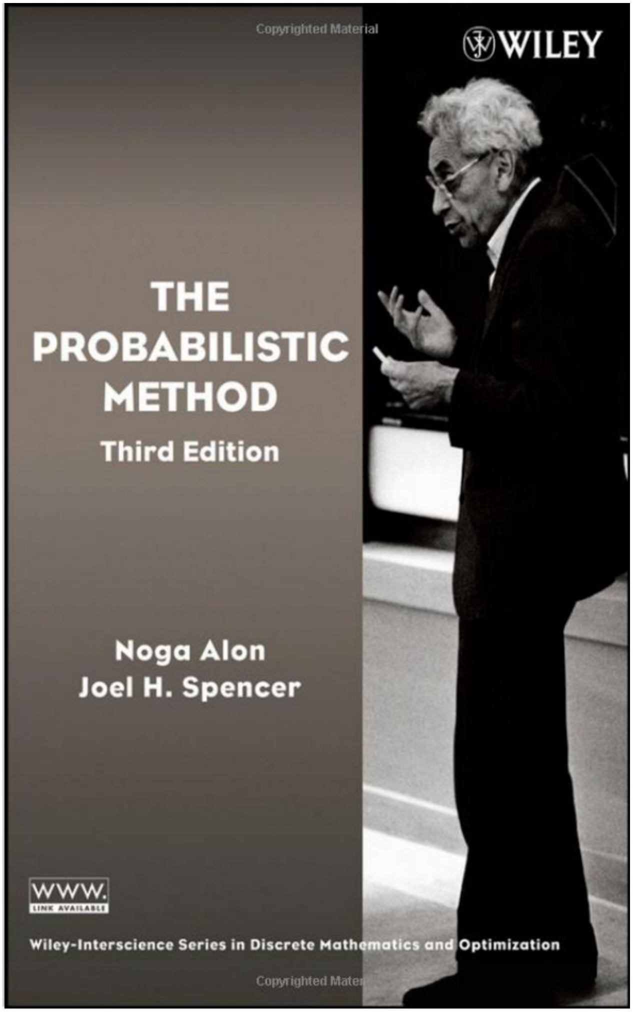
- 例：求扔两个骰子点数之和的方差
  - 第一个骰子点数与第二个骰子点数两个随机变量相互独立；故可使用**Bienaymé**公式

$$\mathrm{Var}[X_1 + X_2] = \mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2]$$
$$= \frac{35}{12} + \frac{35}{12}$$

概率化方法(Probabilistic Method)

- 一种用概率证明存在性的方法
  - 先驱者：**Paul Erdős**

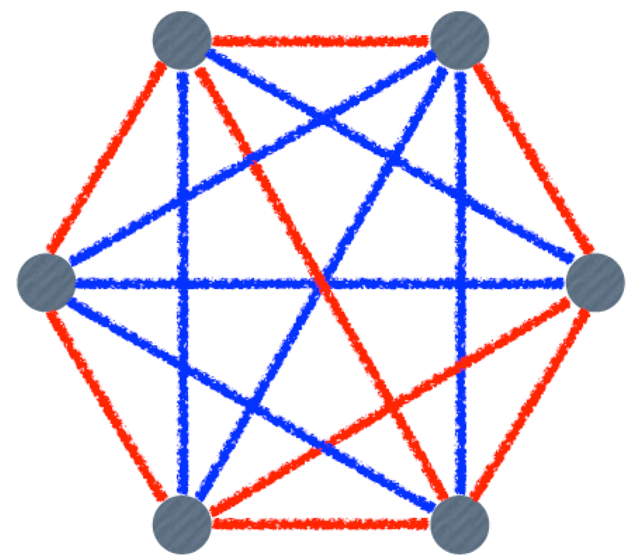
- 定理：如果随机地从集合**S**中选取一个元素，此元素不具有一个特定性质的概率小于**1**，则**S**中存在具有这条性质的元素。



例：Ramsey数

Ramsey定理：
任意6个人中，必有3个人互相认识或互不认识。

- 图论语言：对K_6进行2-边着色，则存在同色的K_3
- Ramsey数$R(k,k)$：最小的n，使得对K_n的任意2-边着色中，均存在同色的K_k

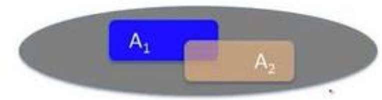


例：Ramsey数

The union bound

For events A_1 and A_2

$$\Pr[A_1 \cup A_2] \le \Pr[A_1] + \Pr[A_2]$$



定理(Erdős 1947)

如果$\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} < 1$，则存在对$K_n$的某种2-边着色，其不含同色的$K_k$子图。

- 证：对每一条边$e \in K_n$独立随机着色，即以1/2的概率着红色，1/2的概率着蓝色。

  给定一K_k子图，

$$P(\text{该}K_k\text{同色}) = 2^{1-\binom{k}{2}}$$

$\Rightarrow P(\text{存在同色}K_k\text{子图}) \le \binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} < 1$ （Union bound）

$\Rightarrow P(\text{不存在同色}K_k\text{子图}) > 0$,

$\Rightarrow$从而存在对K_n的某种2-边着色，其不含同色的K_k子图

本节小结

- 内容1：概率论
  - 概率函数、条件概率、独立性
- 内容2：贝叶斯定理
  - $\Pr[F \mid E] = \dfrac{\Pr[E|F]\Pr[F]}{\Pr[E]}$
- 内容3：随机变量及其期望与方差
  - 期望、条件期望、全期望公式（全概率公式）、期望的线性性质、方差、概率化方法

作业

- 见课程网站