关系的性质

回顾

- 内容1：概率论
  - 概率函数、条件概率、独立性
- 内容2：贝叶斯定理
  - $\Pr[F \mid E] = \dfrac{\Pr[E|F]\Pr[F]}{\Pr[E]}$
- 内容3：随机变量及其期望与方差
  - 期望、条件期望、全期望公式(全概率公式)、期望的线性性质、方差、概率化方法

本节提要

- 问题1：关系具有哪些重要性质?
- 问题2：如何计算关系的闭包?

关系的定义（回顾）

- 若A, B是集合, 从A到B的一个关系是$A\times B$的一个子集.
  - 集合, 可以是空集
  - 集合的元素是有序对
- 若$A=B$: 称为“集合A上的（二元）关系”

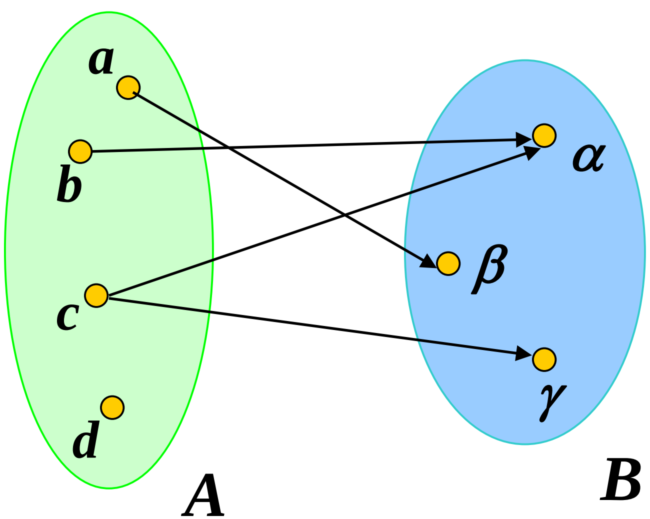
关系的表示（回顾）

- 假设$A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ // 假设为有限集合
- 集合表示: $R_1=\{(a,\beta),(b,\alpha),(c,\alpha),(c,\gamma)\}$

0-1矩阵

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

有向图



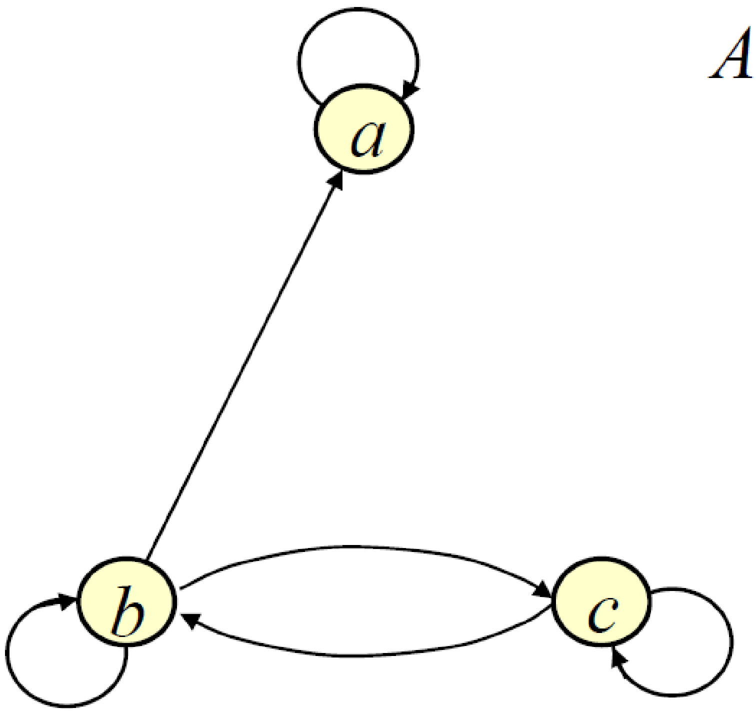
关系的性质：自反性

- 集合A上的关系 R 是:
  - 自反的 reflexive：定义为：对所有的 $a \in A$, $(a,a) \in R$
  - 反自反的 irreflexive：定义为：对所有的$a \in A$, $(a,a) \notin R$

注意区分”非”与”反”

- 设 $A=\{1,2,3\}$, $R \subseteq A \times A$
  - $\{(1,1), (1,3), (2,2), (2,1), (3,3)\}$ 是自反的
  - $\{(1,2), (2,3), (3,1)\}$ 是反自反的
  - $\{(1,2), (2,2), (2,3), (3,1)\}$ 既不是自反的，也不是反自反的

关系的性质：自反性



$A=\{a,b,c\}$

$$M_R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

关系的性质：自反性

- R 是 A 上的自反关系 $\Leftrightarrow$ $I_A \subseteq R$,

  这里I_A是集合A上的恒等关系,即: $I_A=\{(a,a) \mid a \in A\}$

直接根据定义证明:

- $\Rightarrow$ 只需证明：对任意(a,b)，若$(a,b) \in I_A$, 则$(a,b) \in R$
- $\Leftarrow$ 只需证明：对任意的a, 若$a \in A$, 则$(a,a) \in R$

关系的性质：对称性

- 集合A上的关系R是:
  - 对称的 symmetric：定义为：若 $(a,b)\in R$, 则 $(b,a)\in R$
  - 反对称的 anti-~：定义为：若$(a,b)\in R$ 且$(b,a)\in R$，则 $a=b$

- 设 $A=\{1,2,3\}$, $R\subseteq A\times A$
  - $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(3,3)\}$ 是对称的
  - $\{(1,2),(2,3),(2,2),(3,1)\}$ 是反对称的

关系的性质：对称性

- 关系R满足对称性：对任意(a,b)，若 $(a,b)\in R$, 则 $(b,a)\in R$

  关系R是对称的 $\Leftrightarrow \forall <a,b>(<a,b>\in R \Rightarrow <b,a>\in R)$

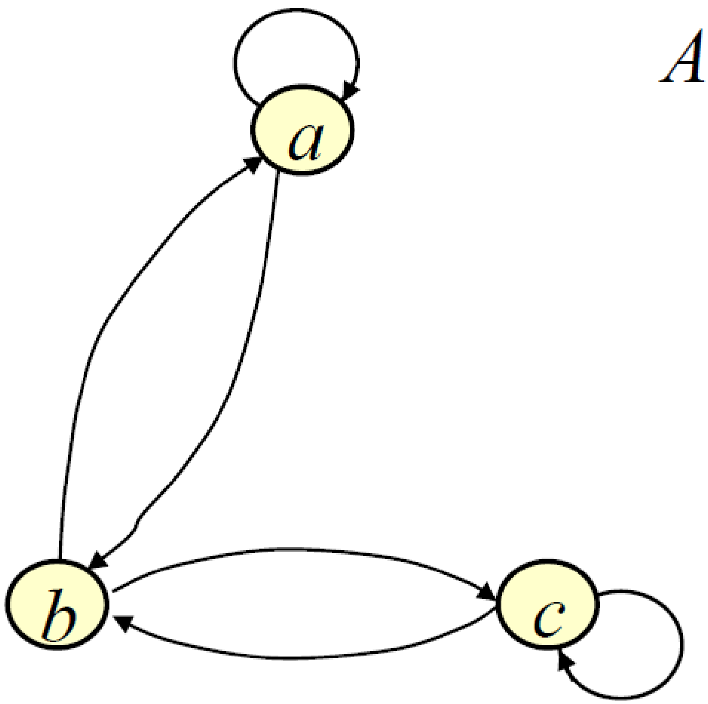
- 注意：$\varnothing$是对称关系。

- 反对称并不是对称的否定:

  （令：$A=\{1,2,3\}$, $R\subseteq A\times A$)

  - $\{(1,1),(2,2)\}$ 既是对称的，也是反对称的
  - $\varnothing$是对称关系，也是反对称关系。

关系的性质：对称性



$A=\{a,b,c\}$

$$M_R=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

关系的性质：对称性

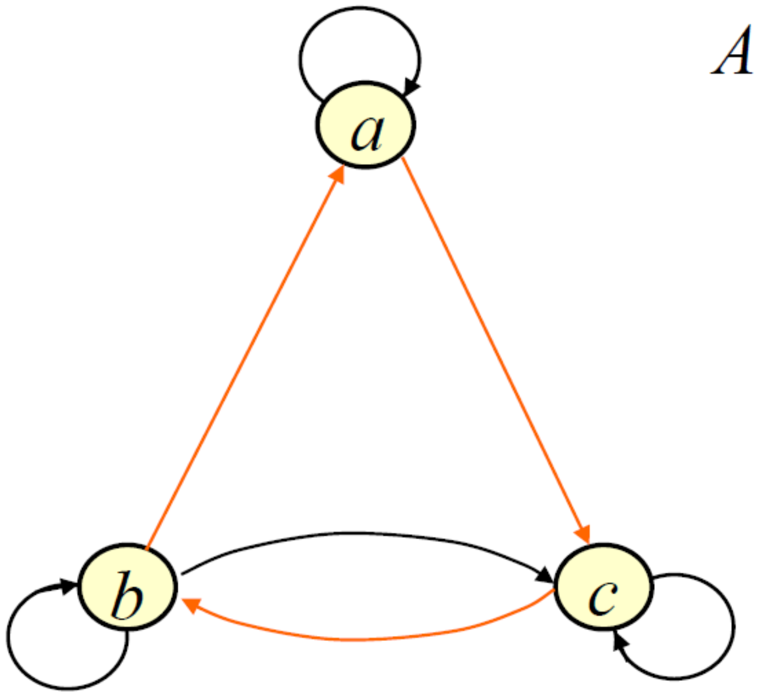
- R 是集合A上的对称关系 $\Leftrightarrow$ $R^{-1}=R$
  - $\Rightarrow$ 证明一个集合等式 $R^{-1}=R$
    - 若$(a,b)\in R^{-1}$, 则$(b,a)\in R$, 由R的对称性可知$(a,b)\in R$, 因此：$R^{-1}\subseteq R$; 同理可得：$R\subseteq R^{-1}$;
  - $\Leftarrow$ 只需证明：对任意的(a,b) 若$(a,b)\in R$, 则$(b,a)\in R$

关系的性质：传递性

- 集合A上的关系R是
  - 传递的 transitive: 若 $(a,b)\in$R, $(b,c)\in$R, 则 $(a,c)\in$R
- 设 $A=\{1,2,3\}$, $R\subseteq A\times A$
  - $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ 传递的
  - $\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ 是非传递的
  - $\{(1,3)\}$?
  - $\varnothing$?

关系R是传递关系 $\Leftrightarrow \forall(a,b,c)(((a,b)\in R\wedge(b,c)\in R)\Rightarrow(a,c)\in R)$

关系的性质：传递性



$A=\{a,b,c\}$

$$M_R=\begin{bmatrix} 1 & 0^{?} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0^{?} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

关系的性质：传递性

- 关系的复合(乘)运算满足结合律，可以用 R^n 表示
  $R\circ R\circ\cdots\circ R$ (n是正整数)
- 命题：$(a,b)\in R^n$ 当且仅当：存在 $t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}\in A$, 满足：$(a,t_1),(t_1,t_2),\cdots,(t_{n-2},t_{n-1}),(t_{n-1},b)\in R$。

- 集合A上的关系R是传递关系 $\Leftrightarrow$ $R^2\subseteq R$
  - 必要性：$\Rightarrow$ 任取$(a,b)\in R^2$,根据上述命题以及R的传递性可得$(a,b)\in R$
  - 充分性：$\Leftarrow$ 若$(a,b)\in R$, $(b,c)\in R$, 则$(a,c)\in R^2$, 由$R^2\subseteq R$可得：$(a,c)\in R$，则 R 是传递关系

例

下列关系是否自反的、对称的、反对称的或可传递的？关系S为：$r_1 \leqslant |r_2|$ $(r_1, r_2 \in R)$时

解：s是自反的，因为对任意的$r \in R$，有$r \leqslant |r|$。

s不是对称的，如$-1 \leqslant |3|$，但$3 > |-1|$。

s不是反对称的，如$-3 \leqslant |2|$，$2 \leqslant |-3|$，但$-3 \neq 2$。

s不是可传递的，$100 \leqslant |-101|$， $-101 \leqslant |2|$，但$100 > |2|$

一些常用关系的性质

非空集合上的空关系

	$=$	$\leq$	$<$	$\mid$	$\equiv_3$	$\varnothing$	E
自反	✓	✓	✗	✓	✓	✗	✓
反自反	✗	✗	✓	✗	✗	✓	✗
对称	✓	✗	✗	✗	✓	✓	✓
反对称	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✗
传递	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

关系运算与性质的保持

	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1^{-1}	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \cap R_2$	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \cup R_2$	✓	✓	✓	✗	✗
$R_1 \circ R_2$	✓	✗	✗	✗	✗

本节提要

- 问题1：关系具有哪些重要性质?
  - 自反性、对称性/反对称性、传递性
- 问题2：如何计算关系的闭包?

“闭包”

一个对象

找出最小的覆盖此对象的圆形/正方形

橘黄色圈、紫色框分别满足:

1．是圆的/正方形的（性质）

2．覆盖所给对象

3．如果有个绿色圆/红色框也覆盖此对象，就一定覆盖橘黄圈/紫色框

关系的闭包：一般概念

- 设R是集合A上的关系，P是给定的某种性质（如：自反、对称、传递），满足下列所有条件的关系R_1称为**R的关于P的闭包**:
  - R_1 满足性质P
  - $R \subseteq R_1$
  - 如果存在集合A上的关系R'，R'满足性质P 并包含R，则$R_1 \subseteq R'$
- 自反闭包r(R)、对称闭包s(R)、传递闭包t(R)

自反闭包的定义

- 设 R 是集合A上的关系，其自反闭包$r(R)$也是A上的关系，且满足：
  - $r(R)$满足自反性；
  - $R \subseteq r(R)$;
  - 对A上的任意关系R'，若R'也满足自反性，且也包含R，则$r(R) \subseteq R'$
- 例子
  - 令A={1,2,3}, R={(1,1), (1,3), (2,3), (3,2)}。则$r(R)$={(1,1), (1,3), (2,3), (3,2), (2,2), (3,3)}。

自反闭包的计算公式

- $r(R) = R \cup I_A$, I_A是集合A上的恒等关系

  (证明所给表达式满足自反闭包定义中的三条性质)

  1. 对任意 $x \in A$, $(x,x) \in I_A$, 因此, $(x,x) \in R \cup I_A$
  2. $R \subseteq R \cup I_A$
  3. 设 R' 集合A上的自反关系，且$R \subseteq R'$, 则对任意 $(x,y) \in R \cup I_A$, 有$(x,y) \in R$, 或者 $(x,y) \in I_A$。 对两种情况，均有 $(x,y) \in R'$, 因此, $R \cup I_A \subseteq R'$

对称闭包的计算公式

- $s(R) = R \cup R^{-1}$, 这里R^{-1}是R的逆关系
  - $s(R)$是对称的。对任意 $x,y \in A$, 如果 $(x,y) \in s(R)$, 则$(x,y) \in R$ 或者$(x,y) \in R^{-1}$, 即$(y,x) \in R^{-1}$ 或者 $(y,x) \in R$, $\therefore$ $(y,x) \in s(R)$
  - $R \subseteq s(R)$
  - 设R' 是集合A上的对称关系, 并且$R \subseteq R'$, 则对任意$(x,y) \in s(R)$, 有$(x,y) \in R$ 或者$(x,y) \in R^{-1}$.
    - 情况1: $(x,y) \in R$, 则 $(x,y) \in R'$
    - 情况2: $(x,y) \in R^{-1}$, 则 $(y,x) \in R$, 于是 $(y,x) \in R'$。根据R' 的对称性: $(x,y) \in R'$

    因此, $s(R) \subseteq R'$

连通关系

- R是集合A上的关系
- 定义集合A上的“R连通”关系R^*如下：
  - 对任意$a,b\in A$, $a\,R^*b$ 当且仅当：存在$t_1,t_2\cdots t_k\in A$(k是正整数)，满足$(a,t_1)\in R$; $(t_1,t_2)\in R$;$\cdots$; $(t_k,b)\in R$。(可以表述为：从a到b之间存在长度至少为1的通路)
  - 显然：对任意$a,b\in A$, $a\,R^*b$ 当且仅当存在某个正整数k,使得aR^kb。
  - 于是：$R^* = R^1\cup R^2\cup R^3\cup\cdots R^i\cup\cdots = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$

传递闭包

$t(R) = R*$

1. 若 $(x, y) \in R^*, (y, z) \in R^*$, 则有$s_1, s_2, \ldots, s_j$ 以及 $t_1, t_2, \ldots, t_k$,

满足: $(x, s_1), \cdots, (s_j, y), (y, t_1), \cdots, (t_k, z) \in R$,

因此, $(x, z) \in R*$.

2. $R \subseteq R^*$

3. 设 R' 是集合A上的传递关系, 且包含R。若$(x, y) \in R^*$,

则有 $t_1, t_2, \ldots, t_k$, 满足: $(x, t_1), \cdots, (t_k, y) \in R$,

于是 $(x, t_1), (t_1, t_2), \cdots, (t_k, y) \in R'$

根据R'的传递性, $(x, y) \in R'$.

例：利用公式证明闭包相等

- 证明：$r(s(R)) = s(r(R))$
  - $r(s(R))$ $= r(R \cup R^{-1})$
    $= (R \cup R^{-1}) \cup I_A$
    $= (R \cup I_A) \cup (R^{-1} \cup I_A{}^{-1})$ （注意：$I_A = I_A{}^{-1}$，并用等幂率）
    $= (R \cup I_A) \cup (R \cup I_A)^{-1}$
    $= s(R \cup I_A)$
    $= s(r(R))$

注意：$r(s(R))$一般省略为$rs(R)$

例：用定义证明有关闭包的性质

证明：$st(R) \subseteq ts(R)$

注意：左边是$t(R)$的对称闭包，根据定义，我们只需证明：

（1）$ts(R)$满足对称性；(2)$t(R) \subseteq ts(R)$

证明(2)，考虑到左边是R的传递闭包，我们只需要证明：

(i) $R \subseteq ts(R)$ (显然)，(ii) $ts(R)$满足传递性(显然)。

证明(1)：对任意$(x, y) \in ts(R)$, $\exists t_1, t_2, \ldots, t_k$，满足

$(x, t_1) \in s(R), (t_1, t_2) \in s(R), \ldots, (t_k, y) \in s(R)$，而$s(R)$满足

对称性，$\therefore (y, t_k) \in s(R), \ldots, (t_2, t_1) \in s(R), (t_1, x) \in s(R)$，

于是：$(y, x) \in ts(R)$，$\therefore ts(R)$满足对称性。

注意：传递关系的对称闭包不一定是传递的。比如：$\{(1,3)\}$

闭包的存在vs可计算

- 令R是A上的关系
  - 若关于某性质P的闭包存在，则必是唯一的。
  - 存在性证明：
    - 令： $R' = \bigcap\{X \mid R \subseteq X \wedge X\text{具有性质P}\}$
    - $A \times A$（自反、对称、传递）保证了R'存在
    - 显然R'具有性质 P
- 闭包计算可行性尚待讨论
  - 自反闭包和对称闭包显然可计算
  - 传递闭包理论上可计算

有限集合上的传递闭包

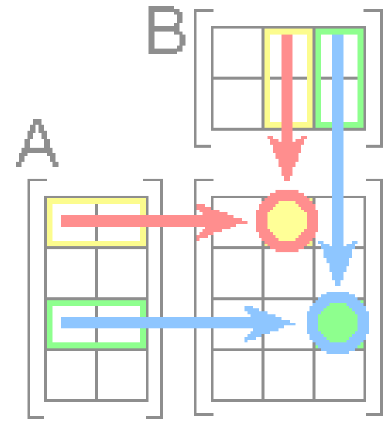
假如$|A|=n$，则A上的关系R的传递闭包是：

$$t(R)=\bigcup_{i=1}^{n} R^i = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

A中只有n个不同的元素，如果在R中存在一条从a到b的长度至少为1的通路，那么存在一条长度不超过n的从a到b的通路。

用矩阵乘法计算传递闭包

传递闭包：$t(R)=\bigcup_{i=1}^{n}R^i=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n$



$$\therefore\quad M_{t(R)}=M_R\vee M_R^2\vee M_R^3\vee\ldots\vee M_R^n$$

算法Tranclosure

$A := M_R$

$B := A$

For i:=2 to n

Begin

$A := A\odot M_R$

$B := B\vee A$

End.(B为M_{R^*})

n×n矩阵相乘，结果中每1项，要做(2n-1次)布尔运算(积与和)，总共需要计算n^2项。

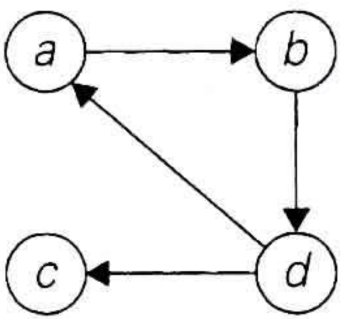
n×n矩阵相加,要做n^2次布尔运算(和)

本算法共进行n-1次矩阵乘和加。

总运算量$(n^2(2n-1)+n^2)(n-1)=2n^3(n-1)$

例

- **算法实例：**
  - (a) 为关系图，(b) 为关系矩阵A，(c) 为$t(A)$的关系矩阵



(a)

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(b)

$$T = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(c)

求传递闭包的Warshall算法

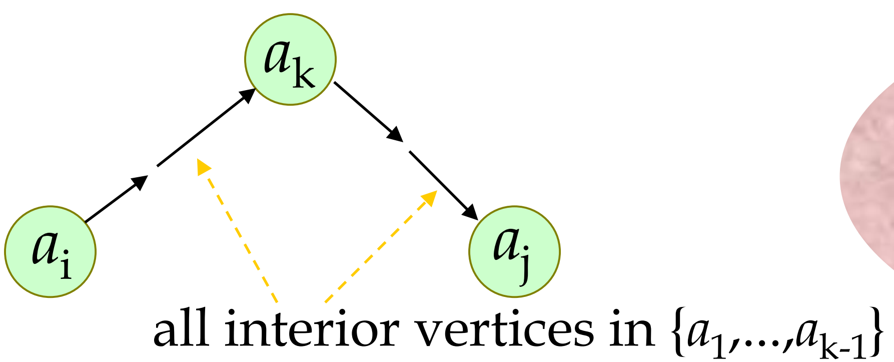
不直接计算 M_R的乘幂, Warshall算法迭代式地用W_{i-1} 计算W_i

这里： 1. W_0 即为R的关系矩阵, M_R。

2. 对$k=1,2,\cdots,n$, $W_k[i,j]=1$ 当且仅当 从a_i到a_j

存在中间节点 均在集合 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$内的通路。

3. W_n 即 $M_{t(R)}$, 也就是所需的结果。



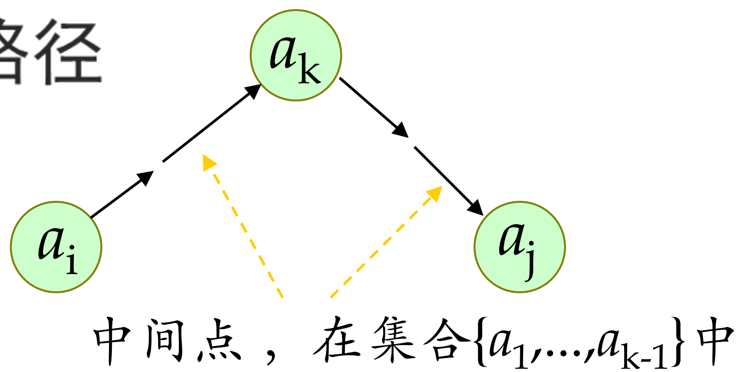
$W_k[i,j]=1$ if and only if:

$W_{k-1}[i,j]=1$, or

$W_{k-1}[i,k]=1$ and $W_{k-1}[k,j]=1$

求传递闭包的Warshall算法

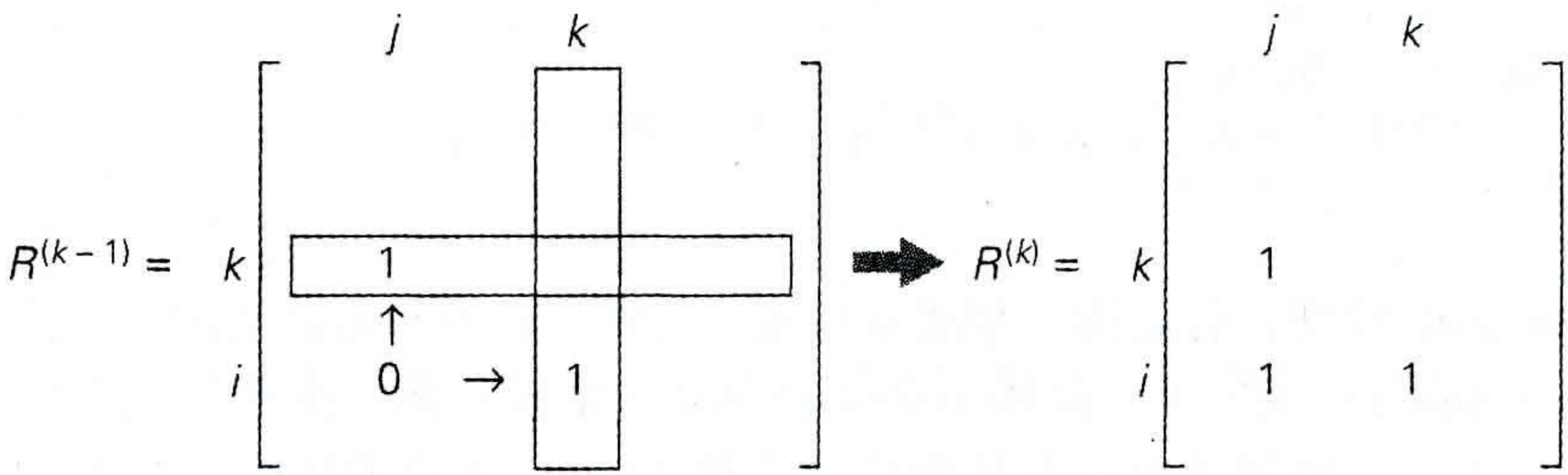
- Warshall算法高效的根源在于可以直接利用上一步计算结果中的有效信息简化当前步的计算过程
- 如图，上一轮计算已经产生了$a_i \to a_k$以及$a_k \to a_j$的路径，当新一轮计算加入a_k点作为中间点时，立即可知道存在$a_i \to a_k \to a_j$的路径



Warshall算法

- 递推关系式：

$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} \vee (R_{ik}^{(k-1)} \wedge R_{kj}^{(k-1)})$$



Warshall算法

- **ALGORITHM** ***WARSHALL*** **(M_R : n×n的0-1矩阵)**
- **1. W := M_R**
- **2. FOR *k* :=1 to *n***
- **FOR *i* :=1 to *n***
- **FOR *j* :=1 to *n***
- $W[i, j] \leftarrow \underline{W[i, j] \vee (W[i, k] \wedge W[k, j])}$
- **3. Output W**
- **END OF ALGORITHM WARSHALL**

这个语句在三重循环内，执行n^3次，每次执行2个布尔运算（和与积）

总运算量: $2n^3$

Warshall算法示例

$$R^{(0)} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

该矩阵反映了不包含中间顶点的路径，框起来的行和列用来计算$R^{(1)}$

$$R^{(1)} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

该矩阵反映了包含编号不大于1的中间顶点（也就是a）的路径(有一条从d到b的新路径)框起来的行和列用来计算$R^{(2)}$

$$R^{(2)} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \end{array}$$

包含编号不大于2的中间顶点(也就是a, b)

$$R^{(3)} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

包含编号不大于3的中间顶点a, b, c)的路径，没有新路径

$$R^{(4)} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

包含编号不大于4的中间顶点(a, b, c, d)的路径.有五条新路径

本节小结

- 问题1：关系具有哪些重要性质?
  - 自反性、对称性/反对称性、传递性
- 问题2：如何计算关系的闭包?
  - 自反闭包$r(R) = R \cup I_A$、对称闭包$s(R) = R \cup R^{-1}$、传递闭包的Warshall算法

作业

- 见课程网站