等价关系与偏序关系

回顾

- 问题1：关系具有哪些重要性质?
  - 自反性、对称性/反对称性、传递性
- 问题2：如果计算关系的闭包?
  - 自反闭包$r(R) = R \cup I_A$、对称闭包$s(R) = R \cup R^{-1}$、传递闭包的Warshall算法

本节提要

- 1：等价关系与等价类
- 2：偏序关系、偏序集、偏序格

等价关系

- 满足性质：自反、对称、传递。
- “等于”关系的推广
- 例子
  - 模3同余关系: $R\subseteq Z\times Z$，xRy 当且仅当 $\frac{|x-y|}{3}$ 是整数。
  - $R\subseteq N\times N$，xRy iff 存在正整数k,l，使得$x^k=y^l$。
    - 自反：若x是任意自然数，当然$x^k=x^k$；
    - 对称：若有k,l, 使$x^k=y^l$；也就有l,k, 使$y^l=x^k$；
    - 传递：若有k,l, 使$x^k=y^l$；并有m, n, 使$y^n=z^m$；则有 $x^{kn}=z^{ml}$

等价类

- R是非空集合A上的等价关系，$\forall x \in A$，等价类 $[x]_R = \{y \mid y \in A \land xRy\}$
- 每个等价类是A的一个非空子集。
- 例：模3同余关系：$R \subseteq Z \times Z$， xRy 当且仅当 $\frac{|x-y|}{3}$ 是整数。
  - 3 个等价类： $[0]=\{\cdots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \cdots\}$;

    $[1]=\{\cdots, -5, -2, 1, 4, 7, \cdots\}$;

    $[2]=\{\cdots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \cdots\}$

等价类的代表元素

- 对于等价类$[x]_R=\{ y \mid y \in A \wedge xRy \}$，$x$称为这个等价类的代表元素.
- 其实，该等价类的每个元素都可以做代表元素：若xRy，则$[x]=[y]$
  - 证明：对任意元素t, 若$t\in[x]$, 则xRt, 根据R的对称性与传递性，且xRy, 可得yRt, 因此 $t\in[y]$, $\therefore [x]\subseteq[y]$; 同理可得$[y]\subseteq[x]$ 。

例

- R_1,R_2分别是集合X_1,X_2上的等价关系。定义$X_1\times X_2$上的关系S:

$$(x_1,x_2)S(y_1,y_2) \text{ 当且仅当 } x_1R_1y_1 \text{ 且 } x_2R_2y_2$$

- 证明：S是$X_1\times X_2$上的等价关系
  - [自反性] 对任意$(x,y)\in X_1\times X_2$, 由R_1,R_2满足自反性可知，$(x,x)\in R_1$, $(y,y)\in R_2$; $\therefore$ $(x,y)S(x,y)$; S自反。
  - [对称性] 假设$(x_1,x_2)S(y_1,y_2)$, 由S的定义以及R_1,R_2满足对称性可知：$(y_1,y_2)S(x_1,x_2)$; S对称。
  - [传递性] 假设$(x_1,x_2)S(y_1,y_2)$, 且$(y_1,y_2)S(z_1,z_2)$, 则$x_1R_1y_1$, $y_1R_1z_1$, $x_2R_2y_2$, $y_2R_2z_2$, 由R_1,R_2满足传递性可知：$x_1R_1z_1$, 且$x_2R_2z_2$, 于是：$(x_1,x_2)S(z_1,z_2)$; S传递。

商集

- R是非空集合A上的等价关系，$\forall x\in A$，则其所有等价类的集合称为商集，记为A/R

- 例子
  - 集合$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$上的恒等关系I_A是等价关系，商集$A/I_A=\{\{a_1\},\{a_2\},\cdots,\{a_n\}\}$
  - 整数集上的模3同余关系是等价关系，其商集为{ {⋯, -6, -3, 0, 3, 6, 9, ⋯}, {⋯, -5, -2, 1, 4, 7, ⋯}, {⋯, -4, -1, 2, 5, 8, 11, ⋯} }

例

- 定义自然数集的笛卡儿乘积上的关系$\boldsymbol{R}$:

  (a, b)R(c,d) 当且仅当 a+d=b+c

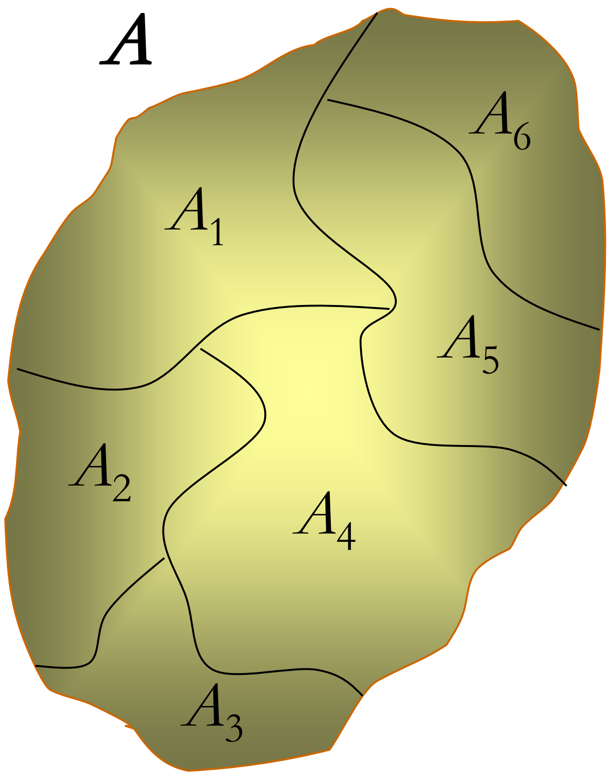
  证明这是等价关系，并给出其商集.

- 定义在ℕ上的二元关系R: xRy iff $x = 2^k y$ (**k**为整数).

  (1)试证明R是等价关系;

  (2)给出商集ℕ/R,并证明ℕ与ℕ/R等势。

集合的划分



集合A的 划分, π, 是A的一组非空子集的集合，即 $\pi \subseteq \rho(A)$, 且满足:

1. 对任意 $x \in A$, 存在某个 $A_i \in \pi$, 使得 $x \in A_i$.

$$\text{i.e. } \bigcup_i A_i = A$$

2. 对任意 $A_i, A_j \in \pi$, 如果 $i \neq j$, 则:

$$A_i \cap A_j = \phi$$

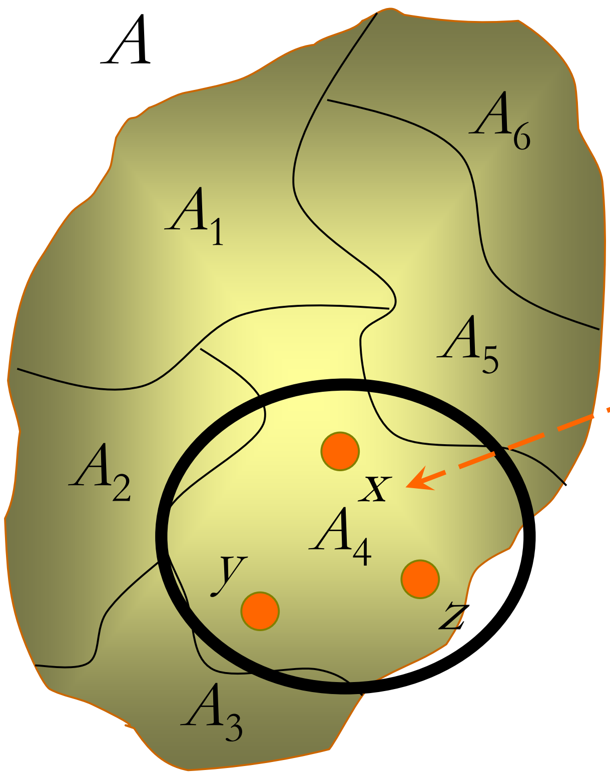
商集即划分

- 假设R是集合A上的等价关系，给定$a \in A$, $R(a)$是由R所诱导的等价类。
- $Q = \{R(x) \mid x \in A\}$是相应的商集。
- 即证明：这样的商集即是A的一个划分：
  - 对任意 $a \in A$, $a \in R(\mathrm{a})$ (R是自反的)
  - 对任意 $a,b \in A$, $(a,b) \notin R$ 当且仅当 $R(a) \cap R(b) = \varnothing$，即：不相等的等价类必然不相交

商集即划分

- 不相等的等价类必然不相交。换句话说，有公共元素的任意两个等价类必然相等。
- 证明：
  - 假设$R(a)\cap R(b)\neq\varnothing$, 设$c$是一个公共元素。
  - 根据等价类的定义，$(a,c)\in R$, $(b,c)\in R$
  - 对任意$x\in R(a)$, $(a,x)\in R$, 由R的传递性和对称性，可得$(c,x)\in R$, 由此可知$(b,x)\in R$, 即$x\in R(b)$, $\therefore R(a)\subseteq R(b)$
  - 同理可得：$R(b)\subseteq R(a)$。因此: $R(a)=R(b)$

根据一个划分定义等价关系



给定 A 上一个划分，可以如下定义A 上的等价关系 $\boldsymbol{R}$:

$\forall x,y\in A$, $(x,y)\in R$ 当且仅当:

x,y 属于该划分中的同一块。

显然，关系 $\boldsymbol{R}$ 满足自反性、对称性、传递性。因此:
$\boldsymbol{R}$ 是等价关系。

利用等价类解题

- 证明：

从1,2,...,2000中任取1001个数，其中必有两个数x,y，满足$x/y=2^k$。

(k为整数)。

想起鸽笼原理没?

利用等价类解题

- 建立1000个集合，每个集合包括1至2000之间的一个奇数以及该奇数与2的k次幂的乘积，但最大不超过2000。可以证明这1000个集合的集合是集合{1,2,3,..., 2000}上的一个划分。注意任意两个1到2000之间的正整数x,y在同一划分块中当且仅当$x/y=2^k$。(k为整数)。
  - 定义集合{1,2,3,..., 2000}上的一个关系R，任意x,y，xRy当且仅当$x/y=2^k$。易证这是一个等价关系。其商集即集合上面的划分。

本节提要

- 1：等价关系与等价类
  - 等价关系：自反、对称、传递；等价关系将元素分成等价类；所有等价类的集合为商集，商集即划分
- 2：偏序关系、偏序集及其特殊元素、偏序格

偏序关系(Partial Order)

- **定义**（**偏序关系**）：非空集合A上的**自反**、**反对称**和**传递**的关系称为A上的偏序关系，记为：$\preccurlyeq$
- 设$\preccurlyeq$为偏序关系，若$(a,b)\in\preccurlyeq$，则记为$\boldsymbol{a\preccurlyeq b}$，读作“$a$小于或等于$b$”

实例

集合 A 上的恒等关系 I_A 是 A 上的偏序关系.

小于或等于关系，整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.

偏序关系（续）

定义 7.20 设 R 为非空集合 A 上的偏序关系,

$x,y\in A$, x 与 y 可比 $\Leftrightarrow x\preccurlyeq y \vee y\preccurlyeq x$.

任取两个元素 x 和 y, 可能有下述几种情况发生:

$x\prec y$(或 $y\prec x$), $x=y$, x 与 y 不是可比的.

定义 7.21 R 为非空集合 A 上的偏序关系,

$\forall x,y\in A$, x 与 y 都是可比的，则称 R 为全序（或线序）

实例：数集上的小于或等于关系是全序关系

整除关系不是正整数集合上的全序关系

定义 7.22 $x,y\in A$, 如果 $x\prec y$ 且不存在 $z\in A$ 使得 $x\prec z\prec y$, 则称 y 覆盖 x.

例如$\{1,2,4,6\}$集合上的整除关系, 2 覆盖 1, 4 和 6 覆盖 2. 但 4 不覆盖 1.

偏序集(poset)与哈斯图

1．偏序集

定义 7.23 集合 A 和 A 上的偏序关系$\preccurlyeq$一起叫做偏序集，记作$(A,\preccurlyeq)$.

实例：

整数集合 Z 和数的小于或等于关系$\leq$构成偏序集$(Z,\leq)$

集合 A 的幂集 $P(A)$和包含关系 $R_\subseteq$构成偏序集$(P(A),R_\subseteq)$.

2．哈斯图

利用偏序关系的自反、反对称、传递性进行简化的关系图

特点：

- 每个结点没有环
- 两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示，位置低的元素的顺序在前
- 具有覆盖关系的两个结点之间连边

例

例： 证明$(P(A), \subseteq)$为全序当且仅当$|A| \leq 1$

证明：(1) “$\Leftarrow$”：

Case 1:$|A| = 0$, $P(A) = \{\emptyset\}$, $(P(A), \subseteq)$为全序

Case 2:$|A| = 1$,设$A = \{a\}$, $P(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$, $(P(A), \subseteq)$为全序

“$\Rightarrow$”：只需证$|A| \geqslant 2$时，$(P(A), \subseteq)$非全序

$\because |A| \geqslant 2 \quad \therefore$可取$a, b \in A, a \neq b$

$\because$非$\{a\}\square\{b\} \quad \therefore (P(A), \subseteq)$非全序

例

6．设偏序集(A,R)和(B,S)，定义 $A\times B$ 上二元关系 T:

$$(x,y)T(u,v) \Leftrightarrow xRu \wedge ySv$$

证明 T 为偏序关系.

证 证明自反性　任取(x,y),

$$(x,y)\in A\times B \Rightarrow x\in A\wedge y\in B \Rightarrow xRx\wedge ySy \Rightarrow (x,y)T(x,y)$$

证明反对称性　任取$(x,y),(u,v)$

$$(x,y)T(u,v)\wedge(u,v)T(x,y) \Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRx \wedge vSy$$

$$\Rightarrow (xRu \wedge uRx) \wedge (ySv \wedge vSy) \Rightarrow x=u \wedge y=v$$

$$\Rightarrow (x,y)=(u,v)$$

证明传递性　任取$(x,y),(u,v),(w,t)$

$$(x,y)T(u,v)\wedge(u,v)T(w,t) \Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRw \wedge vSt$$

$$\Rightarrow (xRu \wedge uRw) \wedge (ySv \wedge vSt) \Rightarrow xRw \wedge ySt$$

$$\Rightarrow (x,y)T(w,t)$$

例

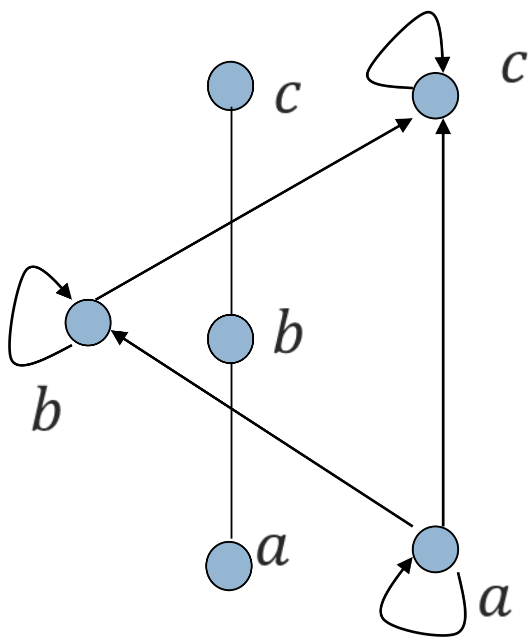
- 例：字典序(**lexicographic order**)与偏序集
  - 给定两个偏序集 $(A, \preccurlyeq_A)$ 与 $(B, \preccurlyeq_B)$，在 $A \times B$ 上定义新关系“$\preccurlyeq$”：
    $(a, b) \preccurlyeq (c, d) \Leftrightarrow a \prec c \vee (a = c \wedge b \preccurlyeq d)$

- 易证，$(A \times B, \preccurlyeq)$ 是一个偏序集。

例

- 例：在字典中“part”和“park”两个单词的顺序如何?
- 定义全序集（英文字母表）$S=\{a,b,c,\cdots,z\}$，元素满足线序关系$a \preccurlyeq b, b \preccurlyeq c, \cdots, y \preccurlyeq z$，令$S^4=S\times S\times S\times S$，易见，$(p,a,r,t)\in S^4$，$(p,a,r,k)\in S^4$；根据字典序，$park \preccurlyeq part$

哈斯图（Hasse Diagrams）



将偏序关系简化为哈斯图：

- 省略所有顶点上的环
- 省略所有因传递关系而引出的边
- 根据箭头的方向自下而上重排列所有顶点，而后将所有的有向边替换为无向边

例

例 偏序集$(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, R_{整除})$和$(P(\{a,b,c\}),R_{\subseteq})$的哈斯图.

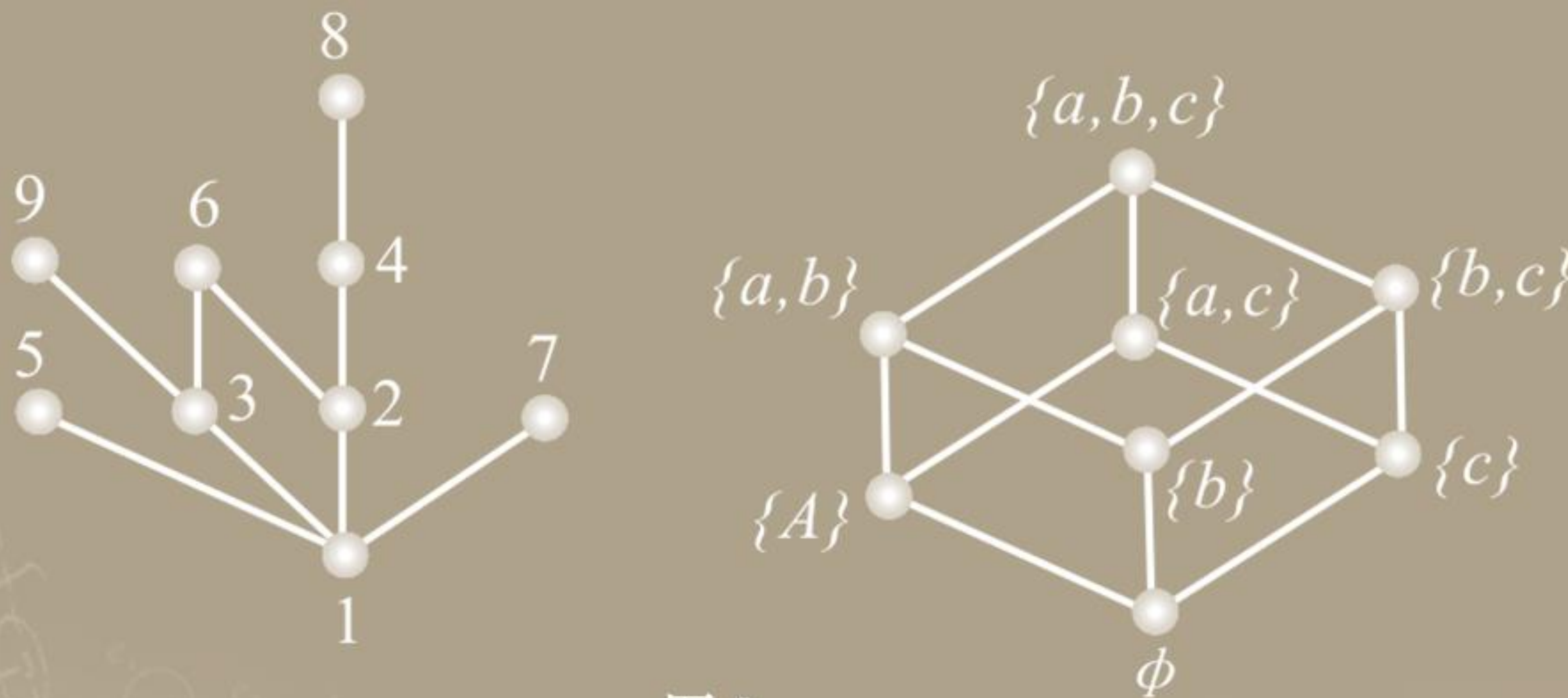
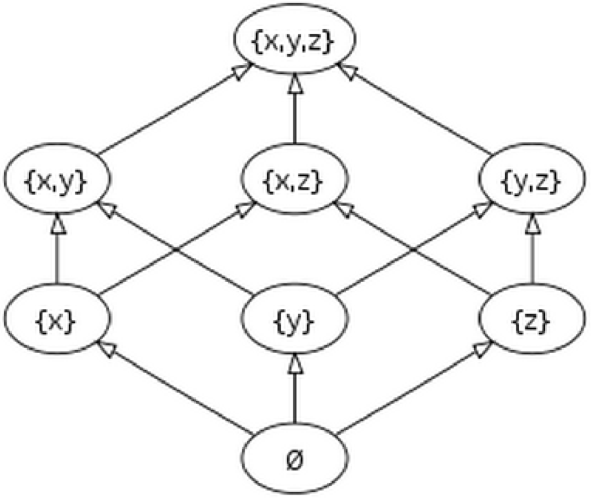


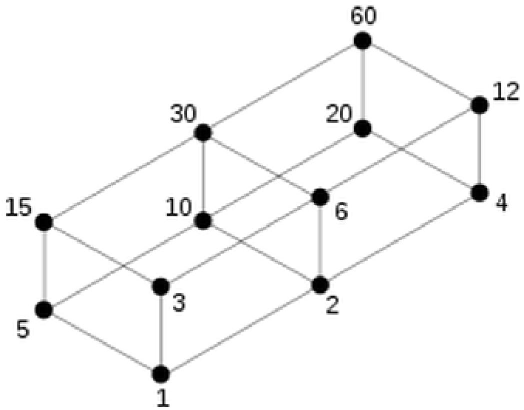
图 8

例

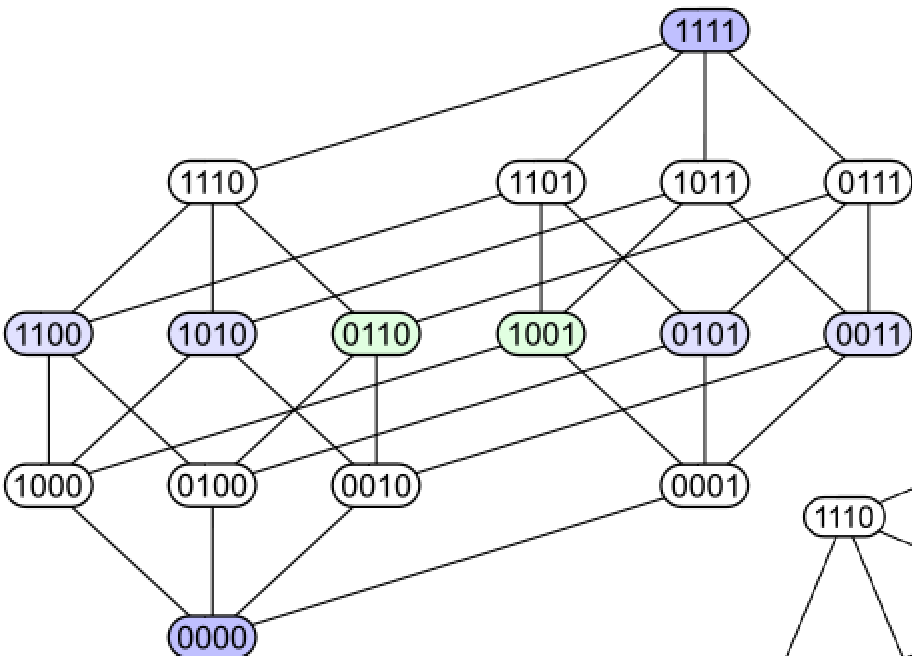
- The power set of { x, y, z } partially ordered by inclusion, has the Hasse diagram:

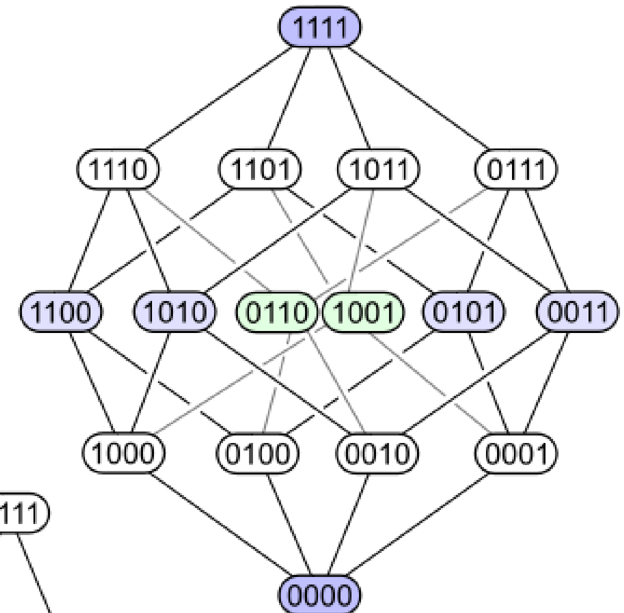


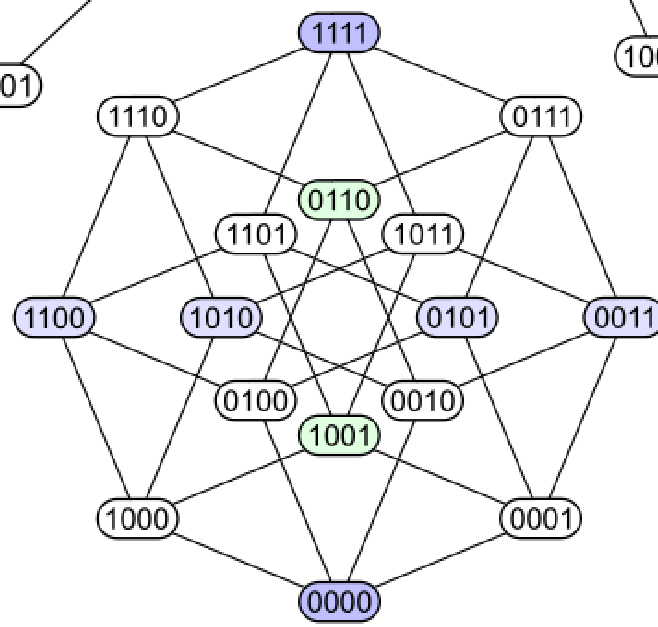
- The set A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 } of all divisors of 60, partially ordered by divisibility, has the Hasse diagram:



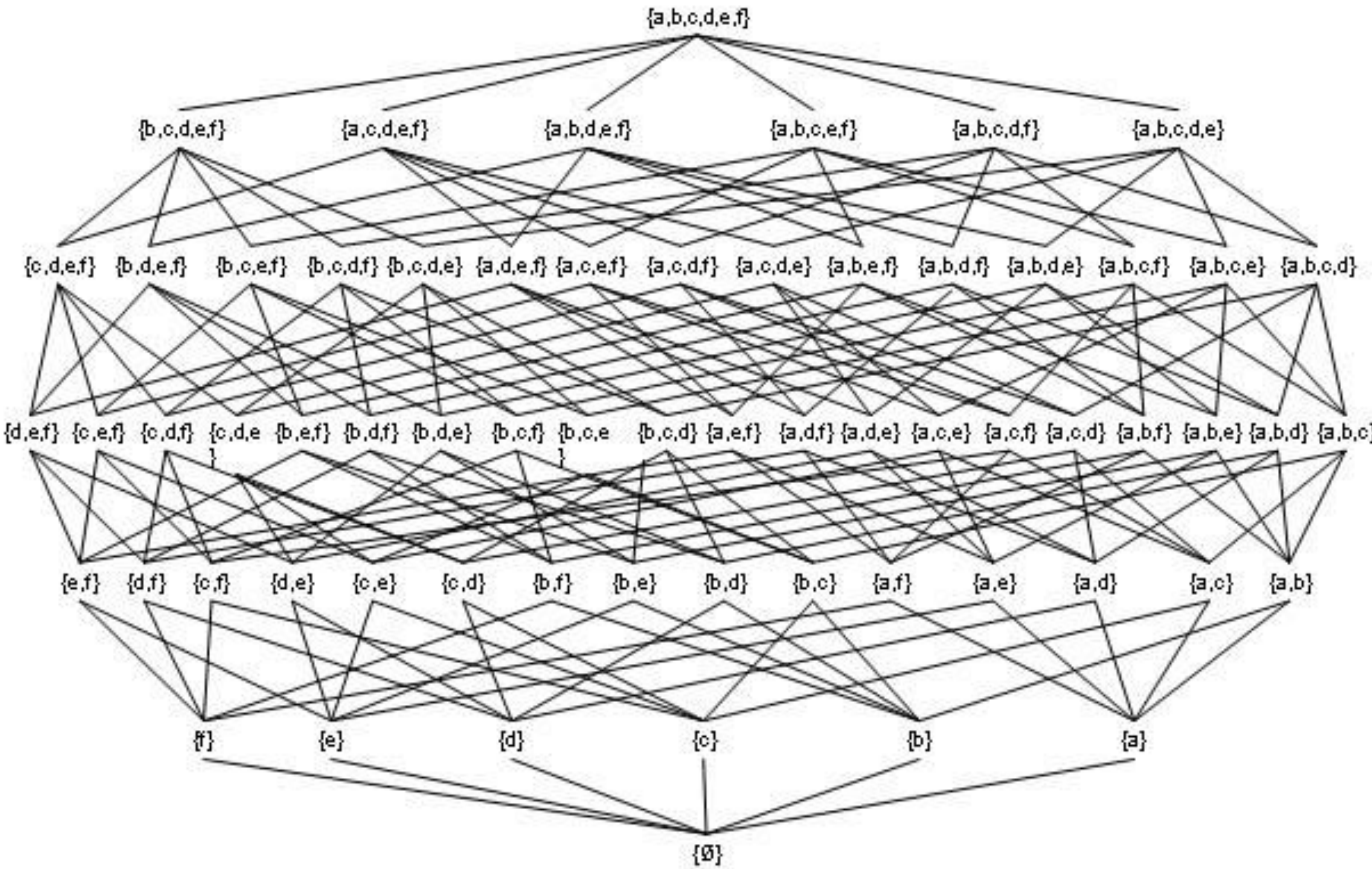
例


1111
1110
1101
1011
0111
1100
1010
0110
1001
0101
0011
1000
0100
0010
0001
0000


1111
1110
1101
1011
0111
1100
1010
0110
1001
0101
0011
1000
0100
0010
0001
0000

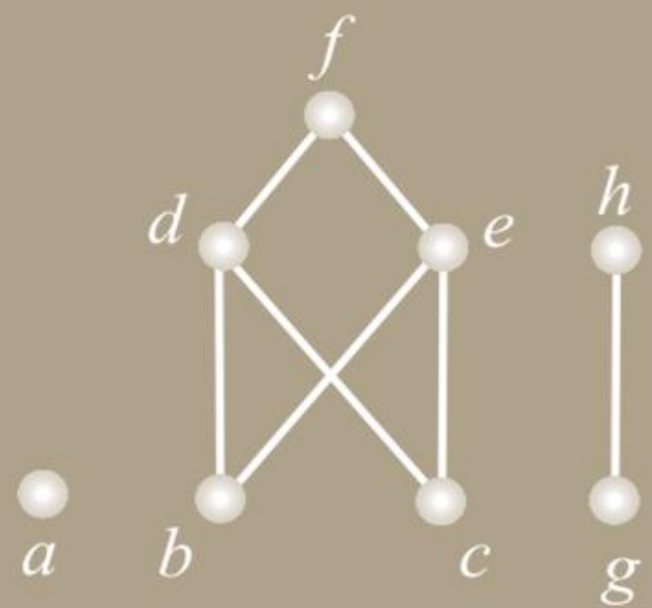

1111
1110
0111
0110
1101
1011
1100
1010
0101
0011
0100
0010
1001
1000
0001
0000

例


{a,b,c,d,e,f}
{b,c,d,e,f} {a,c,d,e,f} {a,b,d,e,f} {a,b,c,e,f} {a,b,c,d,f} {a,b,c,d,e}
{c,d,e,f} {b,d,e,f} {b,c,e,f} {b,c,d,f} {b,c,d,e} {a,d,e,f} {a,c,e,f} {a,c,d,f} {a,c,d,e} {a,b,e,f} {a,b,d,f} {a,b,d,e} {a,b,c,f} {a,b,c,e} {a,b,c,d}
{d,e,f} {c,e,f} {c,d,f} {c,d,e} {b,e,f} {b,d,f} {b,d,e} {b,c,f} {b,c,e} {b,c,d} {a,e,f} {a,d,f} {a,d,e} {a,c,e} {a,c,f} {a,c,d} {a,b,f} {a,b,e} {a,b,d} {a,b,c}
{e,f} {d,f} {c,f} {d,e} {c,e} {c,d} {b,f} {b,e} {b,d} {b,c} {a,f} {a,e} {a,d} {a,c} {a,b}
{f} {e} {d} {c} {b} {a}
{Ø}

例

例 已知偏序集(A,R)的哈斯图如下图所示，试求出集合A和关系R的表达式.



解 $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$

$R=\{(b,d),(b,e),(b,f),(c,d),(c,e),(c,f),(d,f),(e,f),(g,h)\}\cup I_A$

偏序集中的特殊元素

1. 最小元、最大元、极小元、极大元

定义 7.24 设$(A,\preccurlyeq)$为偏序集，$B\subseteq A$，$y\in B$.

（1）若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$成立，则称 y 为 B 的最小元.

（2）若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$成立，则称 y 为 B 的最大元.

（3）若$\forall x(x\in B\wedge x\preccurlyeq y\rightarrow x=y)$成立，则称 y 为 B 的极小元.

（4）若$\forall x(x\in B\wedge y\preccurlyeq x\rightarrow x=y)$成立，则称 y 为 B 的极大元.

性质：

- 对于有穷集，极小元和极大元一定存在，还可能存在多个.
- 最小元和最大元不一定存在，如果存在一定惟一.
- 最小元一定是极小元；最大元一定是极大元.
- 孤立结点既是极小元，也是极大元.

偏序集中的特殊元素（续）

2．下界、上界、下确界（最大下界）、上确界（最小上界）

定义 7.25 设$(A, \preccurlyeq)$为偏序集，$B \subseteq A$，$y \in A$.

（1）若$\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$成立，则称 y 为 B 的上界.

（2）若$\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$成立，则称 y 为 B 的下界.

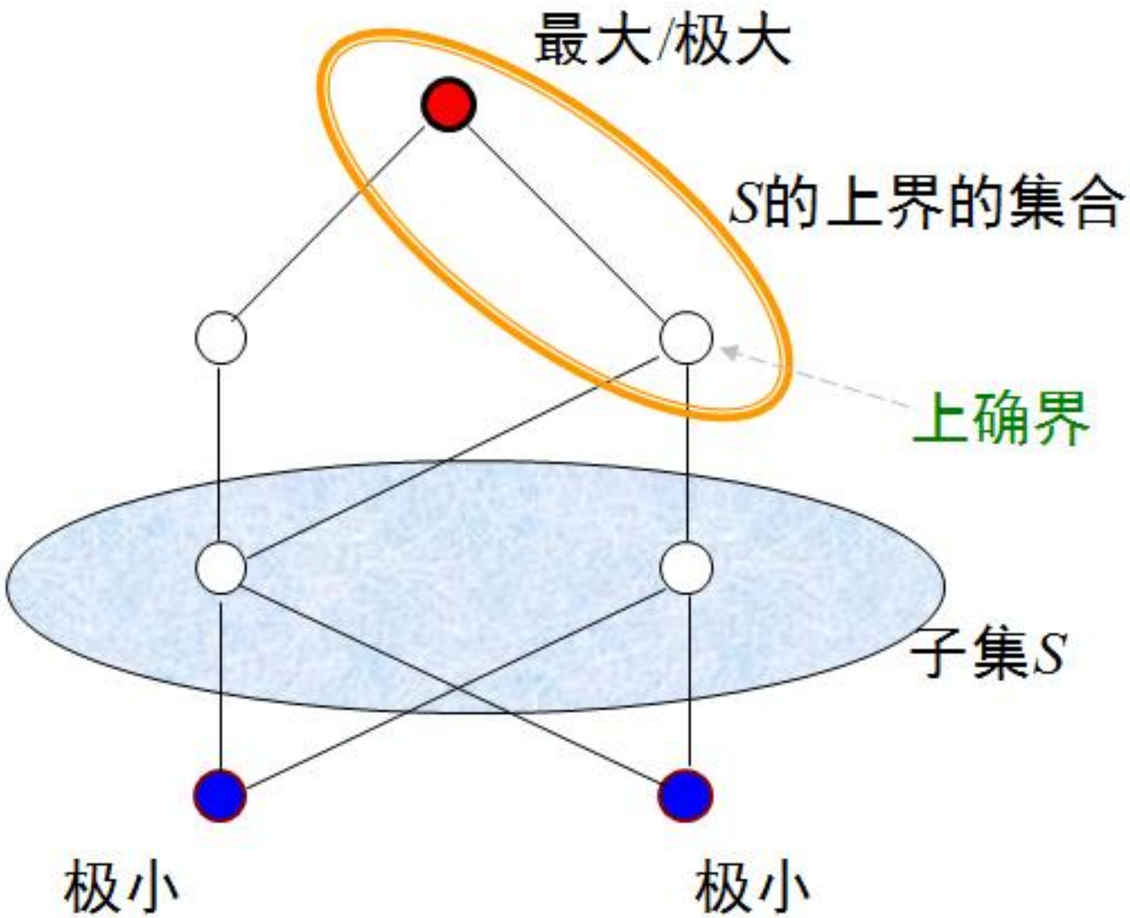
（3）令 $C=\{y \mid y$ 为 B 的上界$\}$，则称 C 的最小元为 B 的最小上界或上确界.

（4）令 $D=\{y \mid y$ 为 B 的下界$\}$，则称 D 的最大元为 B 的最大下界或下确界.

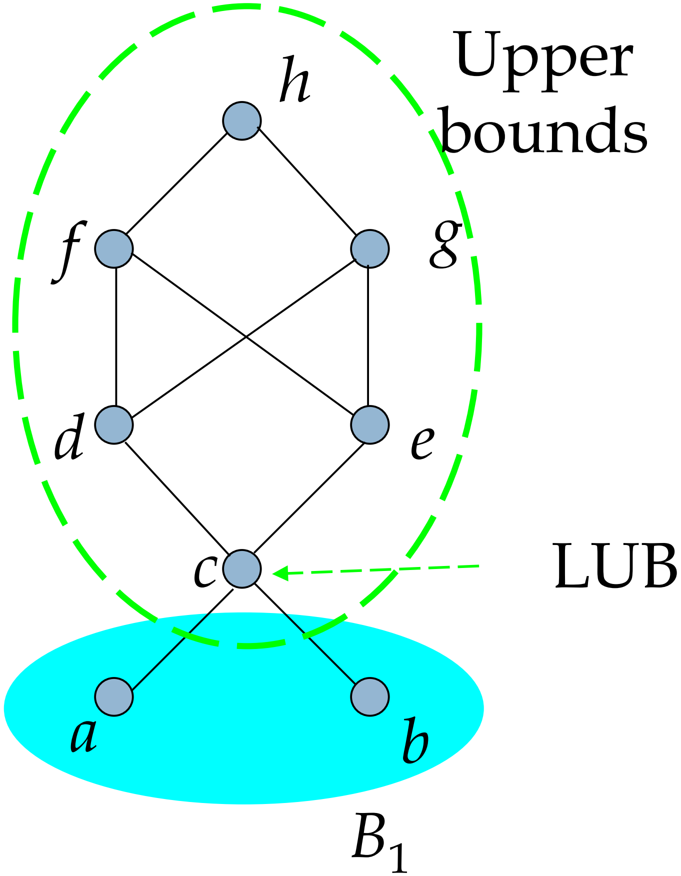
性质：

- 下界、上界、下确界、上确界不一定存在
- 下界、上界存在不一定惟一
- 下确界、上确界如果存在，则惟一
- 集合的最小元就是它的下确界，最大元就是它的上确界；反之不对.

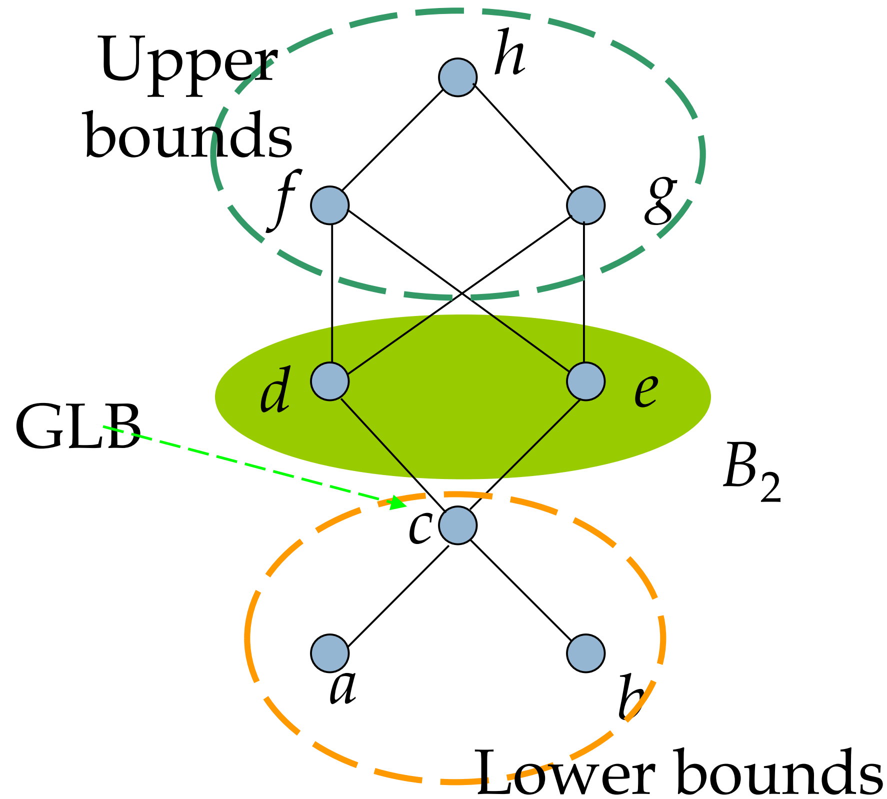
从哈斯图看特殊元素



从哈斯图看特殊元素（续）



Upper bounds
h
f
g
d
e
c
LUB
a
b
B_1



Upper bounds
h
f
g
d
e
GLB
B_2
c
a
b
Lower bounds

例

例 设偏序集$(A,\preccurlyeq)$如下图所示，

求 A 的极小元、最小元、极大元、最大元.

设 $B=\{b,c,d\}$，求 B 的下界、上界、下确界、上确界.

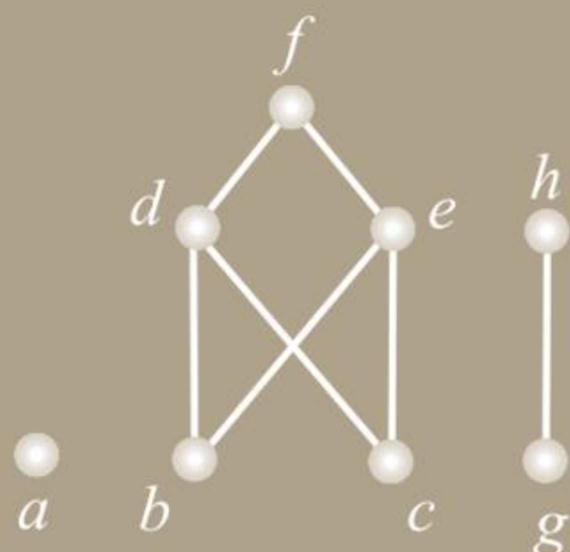


图 10

解 极小元：a, b, c, g； 极大元：a, f, h；没有最小元与最大元.

B 的下界和最大下界都不存在，上界有 d 和 f，最小上界为 d.

例

例 设 X 为集合, $A=P(X)-\{\varnothing\}-\{X\}$, 且 $A\neq\varnothing$. 若 $|X|=n$, $n\geq 2$. 问:

(1) 偏序集 $(A, R_{\subseteq})$ 是否存在最大元?

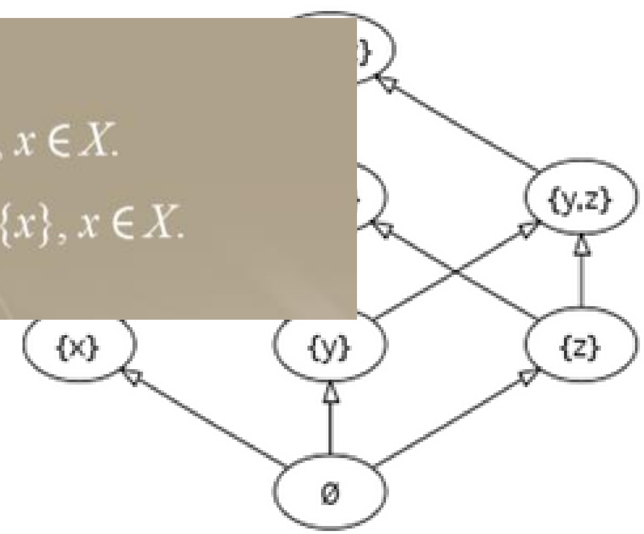
(2) 偏序集 $(A, R_{\subseteq})$ 是否存在最小元?

(3) 偏序集 $(A, R_{\subseteq})$ 中极大元和极小元的一般形式是什么? 并说明理由.

解 $(A, R_{\subseteq})$ 不存在最小元和最大元, 因为 $n\geq 2$.

$(A, R_{\subseteq})$ 的极小元就是 X 的所有单元集, 即 $\{x\}, x\in X$.

$(A, R_{\subseteq})$ 的极大元恰好比 X 少一个元素, 即 $X-\{x\}, x\in X$.



例

4．设偏序集（A, R）的哈斯图如图所示.

（1）写出 A 和 R 的集合表达式

（2）求该偏序集中的

极大元

极小元

最大元

最小元

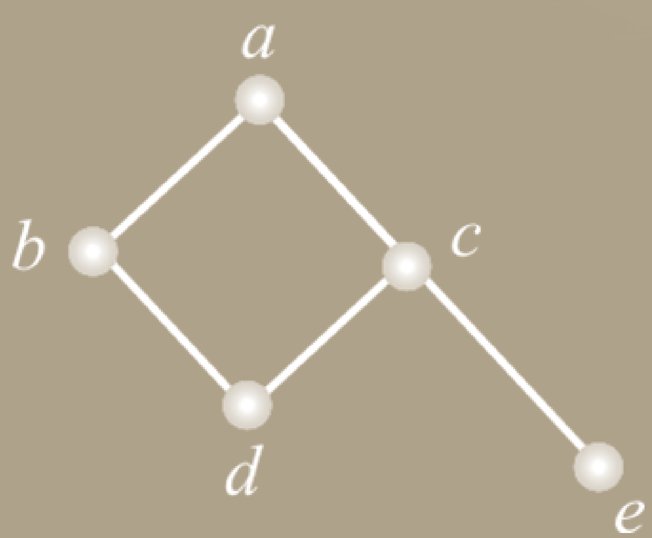


图11

解（1）$A=\{a, b, c, d, e\}$

$R=\{(d,b), (d,a), (d,c), (e,c), (e,a), (b,a), (c,a)\}\cup I_A$

（2）极大元和最大元是 a，极小元是 d, e；没有最小元.

偏序集与格

- 格（lattice）作为一个代数系统可以通过两种方式进行定义：
  - (1) 通过偏序集与偏序关系定义
  - (2) 通过普通集合与特殊运算定义
- 本讲我们仅从偏序的角度去定义格，并研究其中的若干基本运算

偏序集与格（续）

- 格作为偏序集的定义：

定义 13.1 设 $(S, \preccurlyeq)$ 是偏序集，如果 $\forall x, y \in S$，$\{x, y\}$ 都有最小上界和最大下界，则称 S 关于偏序 $\preccurlyeq$ 作成一个格.

由于最小上界和最大下界的惟一性，可以把求 $\{x, y\}$ 的最小上界和最大下界看成 x 与 y 的二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$，即 $x \vee y$ 和 $x \wedge y$ 分别表示 x 与 y 的最小上界和最大下界.

注意：本章中出现的 $\vee$ 和 $\wedge$ 符号只代表格中的运算，而不再有其他的含义.

偏序集与格（续）

2．格的实例

例 设 n 是正整数，S_n 是 n 的正因子的集合.

D 为整除关系，则偏序集 (S_n,D) 构成格.

$\forall x,y\in S_n$，$x\vee y$ 是 $\mathrm{lcm}(x,y)$，即 x 与 y 的最小公倍数.

$x\wedge y$ 是 $\gcd(x,y)$，即 x 与 y 的最大公约数.

下图给出了格 (S_8,D)，(S_6,D) 和 (S_{30},D).

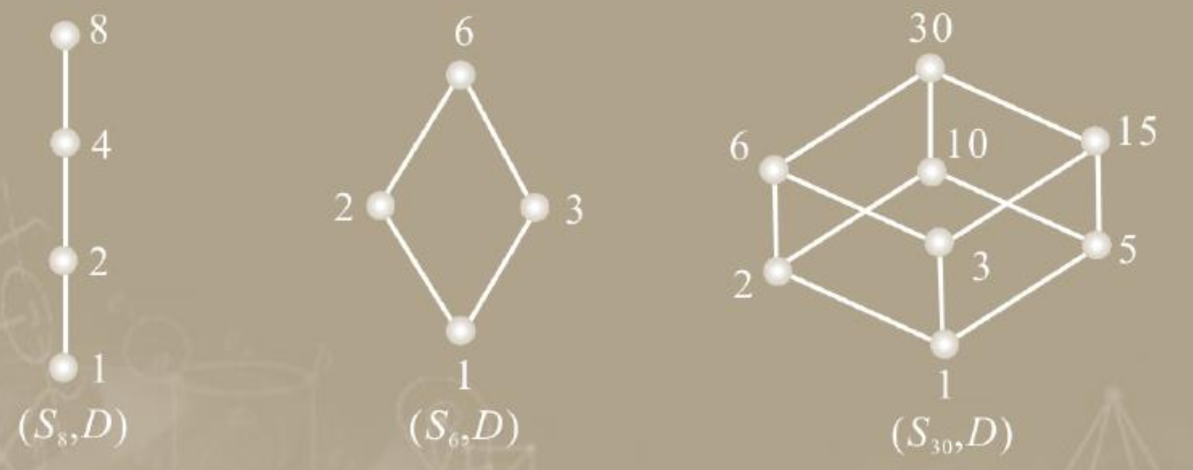


图1

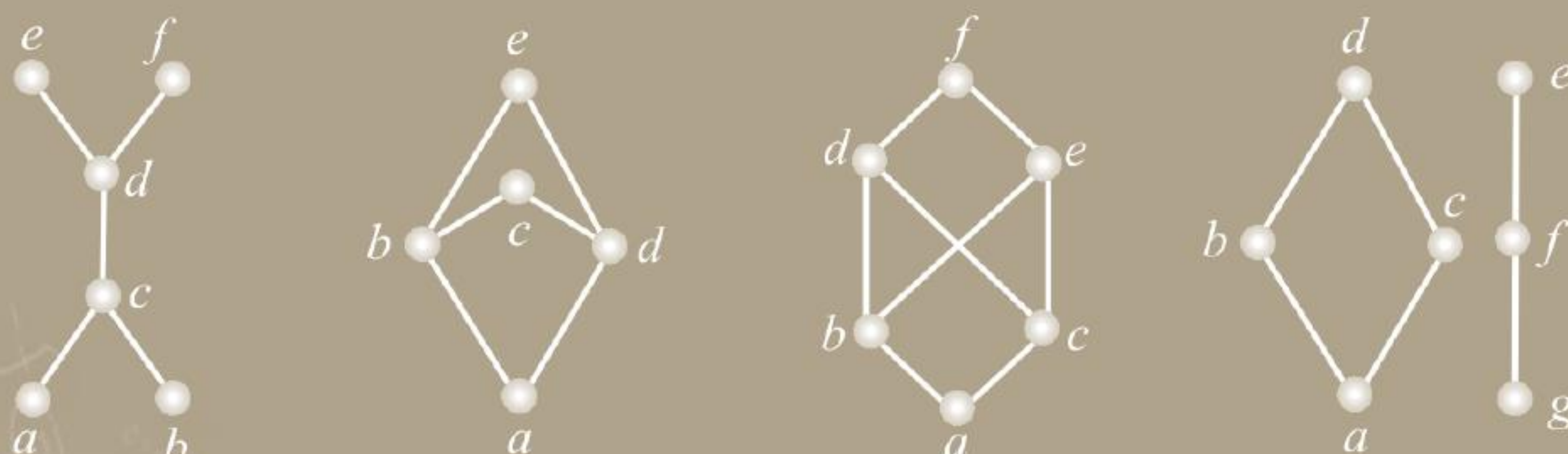
例

例　判断下列偏序集是否构成格，并说明理由.

(1)（$P(B),\subseteq$），其中 $P(B)$是集合 B 的幂集.

(2)（$Z,\leq$），其中 Z 是整数集，$\leq$为小于或等于关系.

(3) 偏序集的哈斯图分别在下图给出.



(a)　(b)　(c)　(d)

格的对偶原理

对偶原理

(1) 对偶命题

定义 13.2 设 f 是含有格中元素以及符号 $=, \preccurlyeq, \succcurlyeq, \vee$ 和 $\wedge$ 的命题. 令 f^* 是将 f 中的 $\preccurlyeq$ 替换成 $\succcurlyeq$, $\succcurlyeq$ 替换成 $\preccurlyeq$, $\vee$ 替换成 $\wedge$, $\wedge$ 替换成 $\vee$ 所得到的命题. 称 f^* 为 f 的对偶命题.

例如, 在格中令

f 是 $(a \vee b) \wedge c \preccurlyeq c$,

f^* 是 $(a \wedge b) \vee c \succcurlyeq c$.

格的对偶原理（续）

（2）格的对偶原理

设 f 是含有格中元素以及符号 $=, \preccurlyeq, \succcurlyeq, \vee$ 和 $\wedge$ 等的命题.

若 f 对一切格为真，则 f 的对偶命题 f^* 也对一切格为真.

例如，如果对一切格 L 都有

$$\forall a,b \in L,\ a \wedge b \preccurlyeq a$$

那么对一切格 L 都有

$$\forall a,b \in L,\ a \vee b \succcurlyeq a$$

本节提要

- 1：等价关系与等价类
  - 等价关系：自反、对称、传递；等价关系将元素分成等价类；所有等价类的集合为商集，商集即划分
- 2：偏序关系、偏序集及其特殊元素、偏序格
  - 偏序关系：自反、反对称、传递；偏序集；哈斯图
  - 偏序集中的特殊元素：最大元、最小元、极小元、极大元；上届、上确界、下届、下确界
  - 偏序格：任意两个元素均有上下确界；对偶原理

作业

- 见课程网站