

# 代数格

# 回顾

2

- 问题1：什么是循环群？
  - 通过某个元素（生成元）生成所有元素
  - 无限循环群有两个生成元，有限循环群有 $\Phi(n)$ 个生成元
- 问题2：循环群的子群是否存在、如何构造？
  - 对于 $n$ 阶循环以及 $n$ 的因子 $d$ ，恰有一个 $d$ 阶子群，为 $\langle a^{n/d} \rangle$
- 问题3：循环群是否存在统一的规律性？
  - 无限循环群皆与整数加群同构， $n$ 阶有限群循环群皆与模 $n$ 加法群同构

# 本节提要

3

- 内容1：代数格的定义与性质
- 内容2：格同态、格同构
- 内容3：分配格、有补格、有补分配格

# 格(回顾)

4

- $(S, \leq)$  的一个 (偏序) 格, 如果下列条件成立:
  - 设  $(S, \leq)$  是偏序集
  - $\forall x, y \in S$ , 存在  $\{x, y\}$  的最小上界  $\text{lub}\{x, y\}$ , 记为  $x \vee y$ 。
  - $\forall x, y \in S$ , 存在  $\{x, y\}$  的最大下界  $\text{glb}\{x, y\}$ , 记为  $x \wedge y$ 。
- 设  $(S, \leq)$  是格, 则  $(S, \wedge, \vee)$  有下列性质:
  - 结合律:  $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ ,  $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
  - 交换律:  $a \wedge b = b \wedge a$ ,  $a \vee b = b \vee a$
  - 吸收律:  $a \wedge (a \vee b) = a$ ,  $a \vee (a \wedge b) = a$

# 代数格

5

- 设 $L$ 是一个集合， $\wedge$ 和 $\vee$ 是 $L$ 上的二元运算，且满足结合律、交换律、吸收律，则称 $(L, \wedge, \vee)$ 是代数格。

等 式	名 称
$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	结合律
$x \wedge y = y \wedge x$ $x \vee y = y \vee x$	交换律
$x \vee (x \wedge y) = x$ $x \wedge (x \vee y) = x$	吸收律

# 代数格中的偏序关系

6

- $\forall x, y \in \mathbf{B}, x \wedge y = x \text{ iff } x \vee y = y$ 
  - 若  $x \wedge y = x$ , 则  $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$  //吸收律
  - 若  $x \vee y = y$ , 则  $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$  //吸收律
- $\forall x, y \in \mathbf{B}$ , 定义  $x \leq y \text{ iff } x \wedge y = x$  (即  $x \vee y = y$ )
  - 证明这个关系满足自反性、反对称性、传递性。
  - 这个偏序构成一个格。
    - $\text{lub}\{x, y\}$  即为  $x \vee y$ 。
    - $\text{glb}\{x, y\}$  即为  $x \wedge y$ 。
- 代数格等同于 (偏序) 格

# 格的代数性质

7

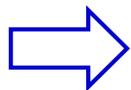
结合律

交换律

吸收律

幂等律

吸收律



幂等律

$$x \wedge \underline{x} = x \wedge (\underline{x} \vee (x \wedge x)) = x \quad (\text{两次应用吸收律})$$

同理可证:  $x \vee x = x$

# 本节提要

8

- 内容1：代数格的定义与性质
  - 满足结合律、交换律、吸收律，亦可通过此三性质定义代数格
- 内容2：格同态、格同构
- 内容3：分配格、有补格、有补分配格

# 格同态

定义 13.5 设  $L_1$  和  $L_2$  是格,

$$f: L_1 \rightarrow L_2,$$

若  $\forall a, b \in L_1$  有

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b),$$

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$$

成立, 则称  $f$  为格  $L_1$  到  $L_2$  的同态映射, 简称格同态.

# 格同态与格同构

■ 设 $f$ 是格 $L_1$ 到 $L_2$ 的映射,

○ (1) 若 $f$ 为格同态映射, 则 $f$ 保序, 即

$$(\forall x, y \in L_1)(x \leq y \rightarrow f(x) \leq f(y))$$

○ (2) 若 $f$ 为双射, 则 $f$ 为格同构映射 (即格同构) 当且仅当

$$(\forall x, y \in L_1)(x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y))$$

# 例

11

例 设  $L_1 = \langle S_{12}, D \rangle$ ,  $L_2 = \langle S_{12}, \leq \rangle$  是格, 其中:  
 $S_{12}$  是 12 的所有正因子构成的集合,  
 $D$  为整除关系,  $\leq$  为通常数的小于或等于关系.

令

$$f: S_{12} \rightarrow S_{12}, f(x) = x$$

$f$  是双射, 但不是格  $L_1$  到  $L_2$  的同构映射.

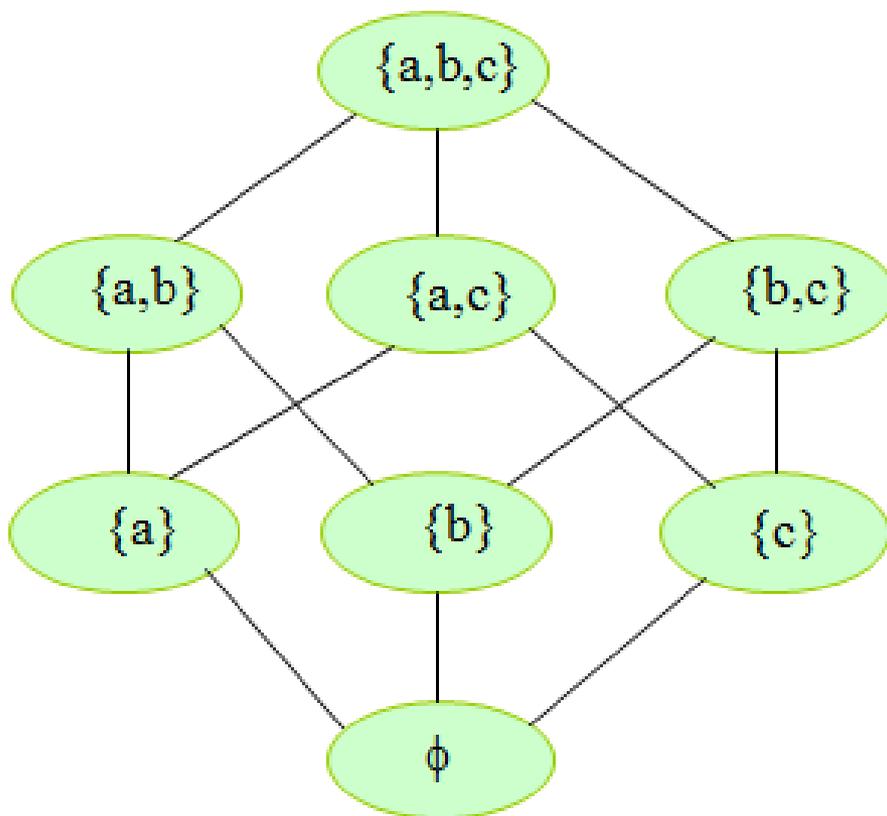
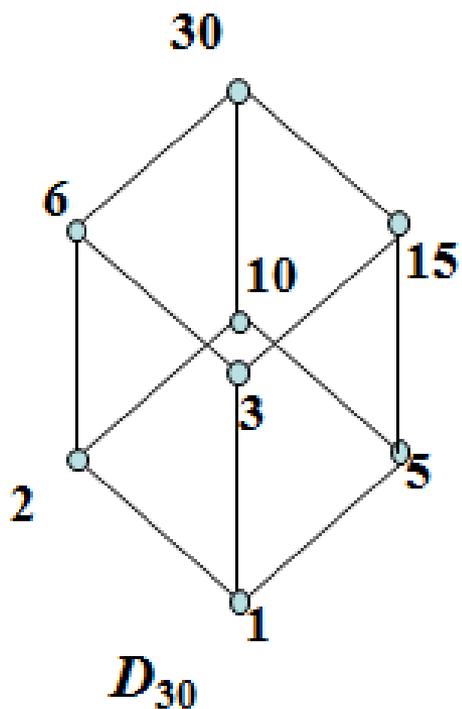
因为  $f(2) \leq f(3)$ , 但 2 不整除 3.

根据上述定理可知  $f$  不是同构映射

# 格同构的直观特征

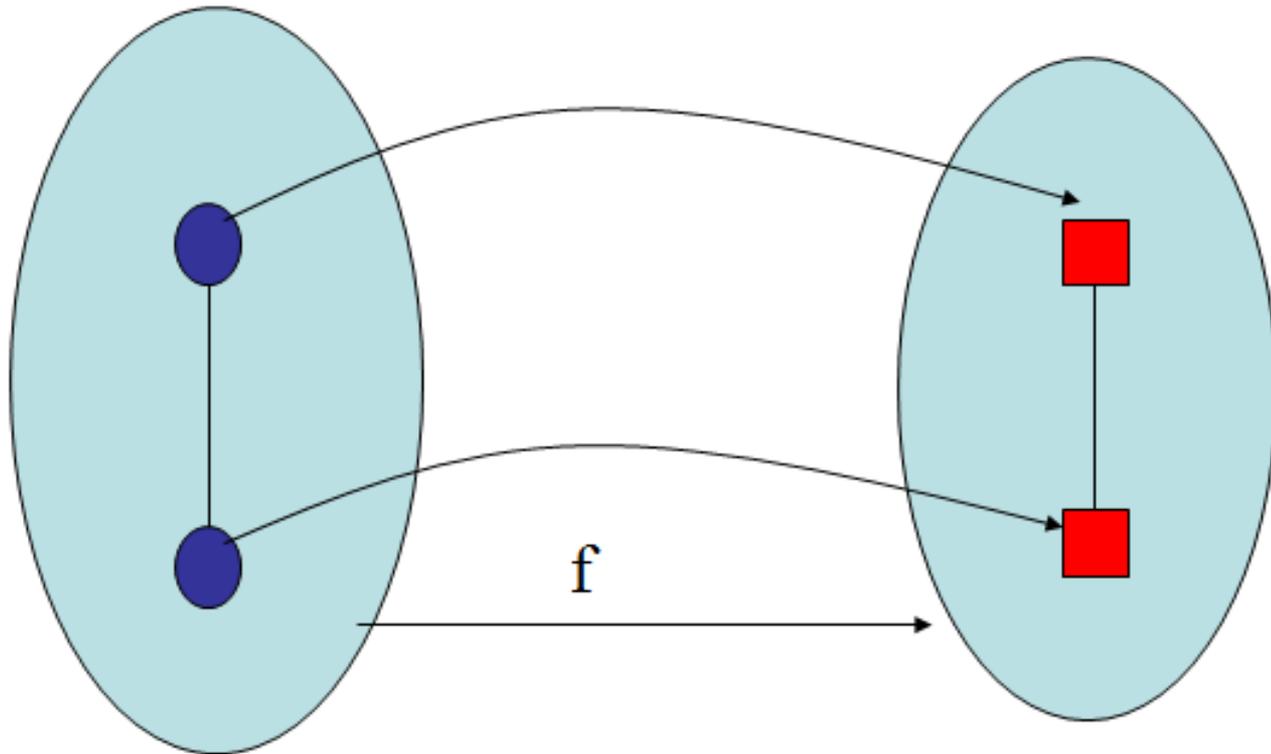
12

- 观察以下2个格的哈斯图：



# 格同构的直观特征 (续)

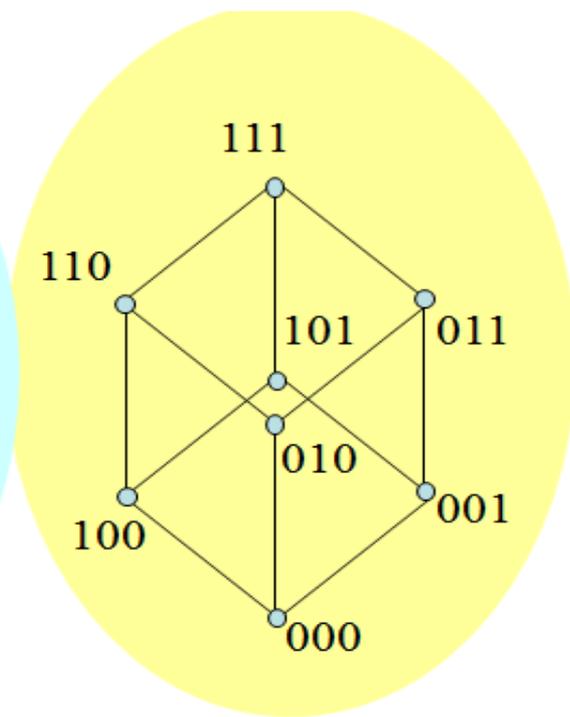
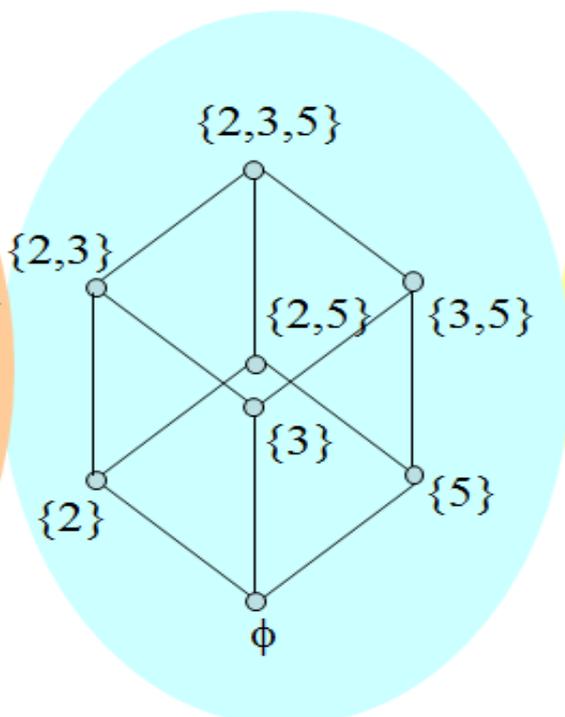
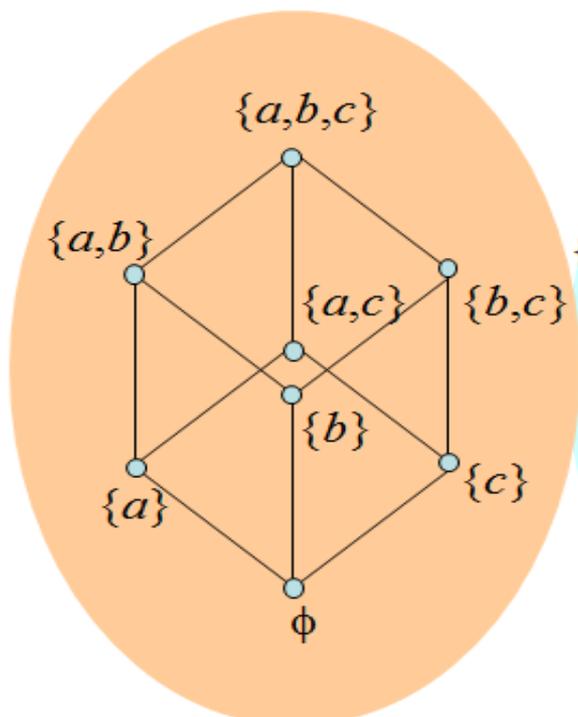
13



# 格同构的直观特征 (续)

14

- Iso  $\Rightarrow$  same
  - Morph  $\Rightarrow$  shape
- }  $\Rightarrow$  Isomorphic lattices have same Hasse diagrams' shape



# 本节提要

15

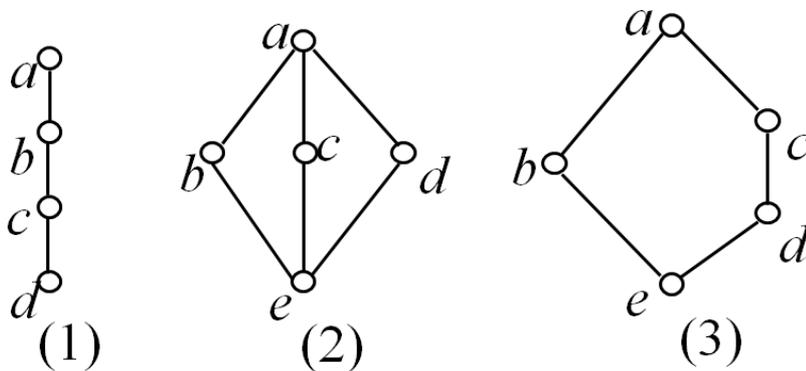
- **内容1：代数格的定义与性质**
  - ▣ 满足结合律、交换律、吸收律，亦可通过此三性质定义代数格
- **内容2：格同态、格同构**
  - ▣ 格同态具有保序性，格同构的充要条件
- **内容3：分配格、有补格、有补分配格**

# 几种典型的格

16

## ■ 定义（三种典型的格）：

- (1) 链 (chain)
- (2) 钻石格 (diamond lattice,  $M_3$ )
- (3) 五角格 (pentagon lattice,  $N_5$ )



# 分配格

17

■ **定义**（分配格）：设 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 为格，若

$\forall a, b, c \in L$ ，有

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

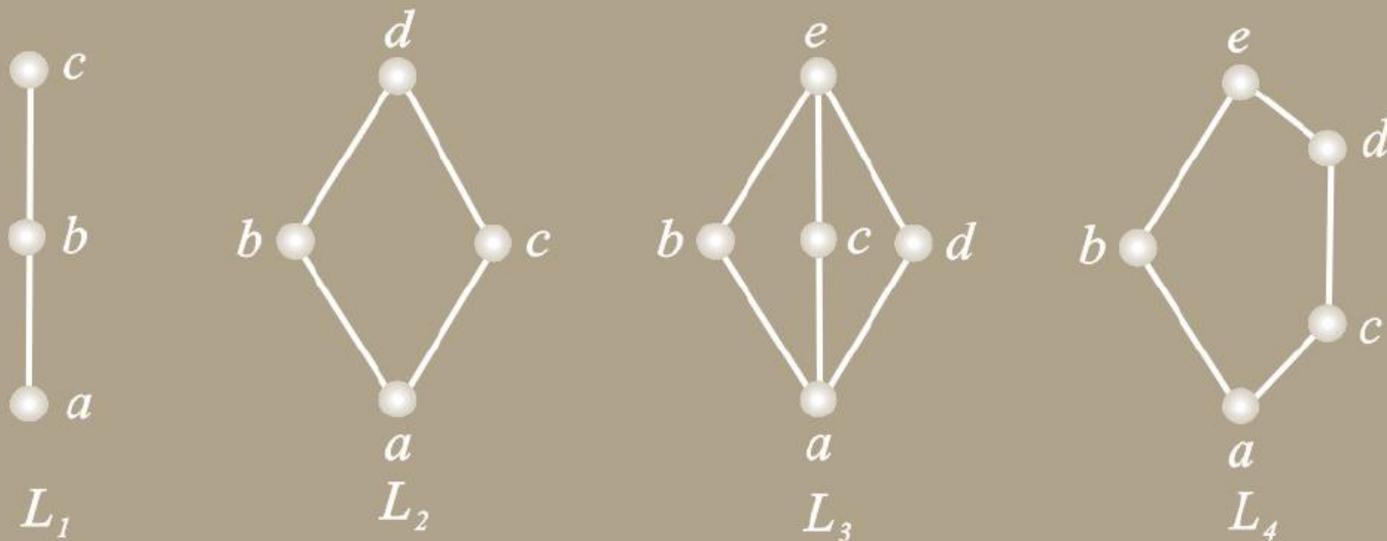
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

则称 $L$ 为**分配格**（distributive lattice）

# 例

18

例 参见下图



$L_1$  和  $L_2$  是分配格,  $L_3$  和  $L_4$  不是分配格.

图5

在  $L_3$  中,  $b \wedge (c \vee d) = b \wedge e = b$ ,  $(b \wedge c) \vee (b \wedge d) = a \vee a = a$

在  $L_4$  中,  $c \vee (b \wedge d) = c \vee a = c$ ,  $(c \vee b) \wedge (c \vee d) = e \wedge d = d$

# 子格

19

- **子格** (sub lattice) 是格的子代数。设  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  是格，非空集合  $S \subseteq L$ ，若  $S$  关于  $L$  中的运算  $\wedge, \vee$  **仍构成格**，称  $\langle S, \wedge, \vee \rangle$  是  $L$  的 **子格**

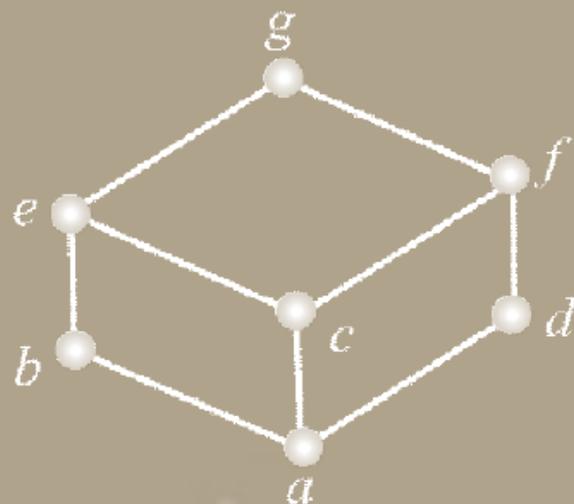
例 13.5 设格  $L$  如图 3 所示. 令

$$S_1 = \{a, e, f, g\}, S_2 = \{a, b, e, g\}$$

$S_1$  不是  $L$  的子格, 因为

$$e, f \in S_1 \text{ 但 } e \wedge f = c \notin S_1.$$

$S_2$  是  $L$  的子格.



# 分配格的判定定理(一)

20

- **定理**（分配格判定定理一）：设 $L$ 为格，则 $L$ 是分配格当且仅当 $L$ 不含有与 $M_3$ （钻石格）或 $N_5$ （五角格）同构的子格
- 推论：
  - (1) 小于五元的格皆为分配格
  - (2) 任何链皆为分配格

# 例

21

例 说明图 6 中的格是否为分配格, 为什么?

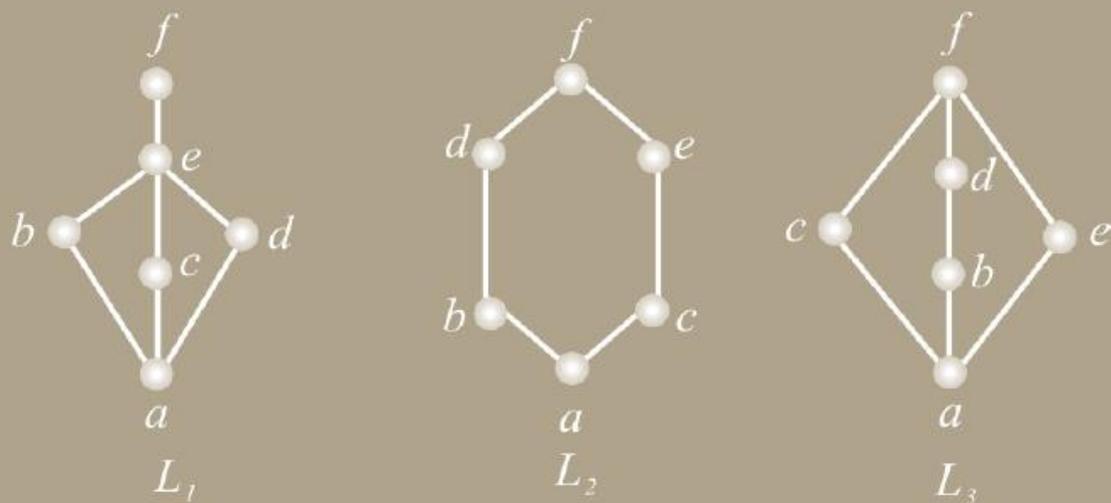


图 6

解  $L_1, L_2$  和  $L_3$  都不是分配格.

$\{a, b, c, d, e\}$  是  $L_1$  的子格, 并且同构于钻石格;

$\{a, b, c, e, f\}$  是  $L_2$  的子格, 并且同构于五角格;

$\{a, c, b, e, f\}$  是  $L_3$  的子格, 也同构于钻石格.

# 分配格的判定定理(二)

22

- **定理**（分配格判定定理二）：设 $L$ 为格，

则 $L$ 是分配格当且仅当

$$(\forall a, b, c \in L)(a \wedge b = a \wedge c \text{ 且 } a \vee b = a \vee c)$$

$$\rightarrow b = c$$

# 分配格的判定定理(二)

23

证 必要性.  $\forall a, b, c \in L$ , 有

$$b = b \vee (a \wedge b) \quad (\text{吸收律, 交换律})$$

$$= b \vee (a \wedge c) \quad (\text{已知条件代入})$$

$$= (b \vee a) \wedge (b \vee c) \quad (\text{分配律})$$

$$= (a \vee c) \wedge (b \vee c) \quad (\text{已知条件代入, 交换律})$$

$$= (a \wedge b) \vee c \quad (\text{分配律})$$

$$= (a \wedge c) \vee c \quad (\text{已知条件代入})$$

$$= c \quad (\text{交换律, 吸收律})$$

# 分配格的判定定理(二)

24

充分性.

假若  $L$  不是分配格, 必含有与钻石格或五角格同构的子格.

假设  $L$  中含有与钻石格同构的子格  $\{u, v, x, y, z\}$ , 其中  $u$  为它的最小元,  $v$  为它的最大元.

从而推出

$$x \wedge y = x \wedge z = u, \quad x \vee y = x \vee z = v$$

但  $y \neq z$ , 与已知条件

$$\forall a, b, c \in L, \text{ 有 } a \wedge b = a \wedge c \text{ 且 } a \vee b = a \vee c \Rightarrow b = c$$

矛盾. 对五角格的情况同理可证.

# 例

25

例 以下三个格都不是分配格.

在  $L_1$  中有  $b \vee c = b \vee d, b \wedge c = b \wedge d$ , 但  $c \neq d$

在  $L_2$  中有  $b \wedge c = b \wedge e, b \vee c = b \vee e$ , 但  $c \neq e$

在  $L_3$  中有  $c \wedge b = c \wedge d, c \vee b = c \vee d$ , 但  $b \neq d$

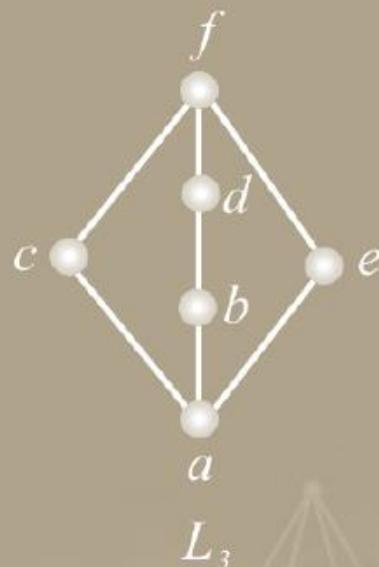
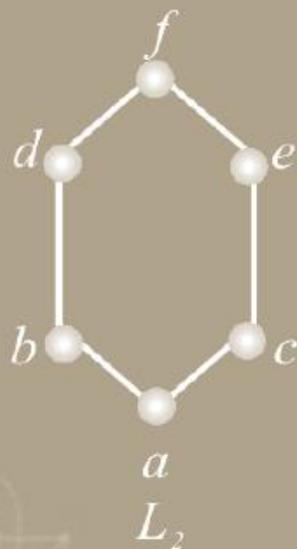
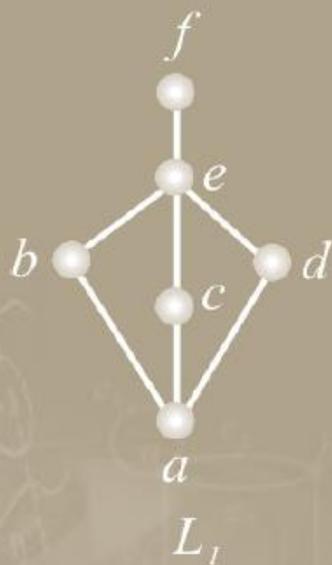


图7

# 有界格

26

- **定义**（有界格）：设 $L$ 为格，
    - 若存在 $b \in L$ ，使得 $\forall x \in L$ 有 $b \leq x$ ，则称元素 $b$ 是格 $L$ 的**全下界**（bottom）
    - 若存在 $t \in L$ ，使得 $\forall x \in L$ 有 $x \leq t$ ，则称元素 $t$ 是格 $L$ 的**全上界**（top）
- 此时格 $L$ 称为**有界格**（bounded lattice）

# 有界格（续）

27

## ■ 注意：

- 若格 $L$ 中存在全下界或全上界，则一定**唯一**
- 一般将格 $L$ 的全下界记为**0**，全上界记为**1**
- 有界格 $L$ 一般记为 **$\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$**

## ■ 事实：

- **有限格皆为有界格**，设 $L = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ，则
  - $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$ 是 $L$ 的**全下界**
  - $a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$ 是 $L$ 的**全上界**
- 求涉及有界格的命题之对偶命题，须将全下界与全上界**对换**

# 有界格（续）

- 有界格 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ 满足同一律、支配律
  - 同一律:  $\forall a \in L, a \vee \mathbf{0} = a, a \wedge \mathbf{1} = a$
  - 支配律:  $\forall a \in L, a \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}, a \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}$
  - $\mathbf{0}$ 是关于 $\vee$ 运算的单位元,  $\wedge$ 运算的零元;
  - $\mathbf{1}$ 是关于 $\wedge$ 运算的单位元,  $\vee$ 运算的零元。

# 补元

- **定义**（有界格的补元）：设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ 为

有界格， $a \in L$ ，若存在 $b \in L$ 使得

$$a \wedge b = \mathbf{0} \text{ 且 } a \vee b = \mathbf{1}$$

成立，则称元素 $b$ 是 $a$ 的**补元**（complement）

# 例

30

例 考虑下图中的四个格. 针对不同的元素, 求出所有的补元.

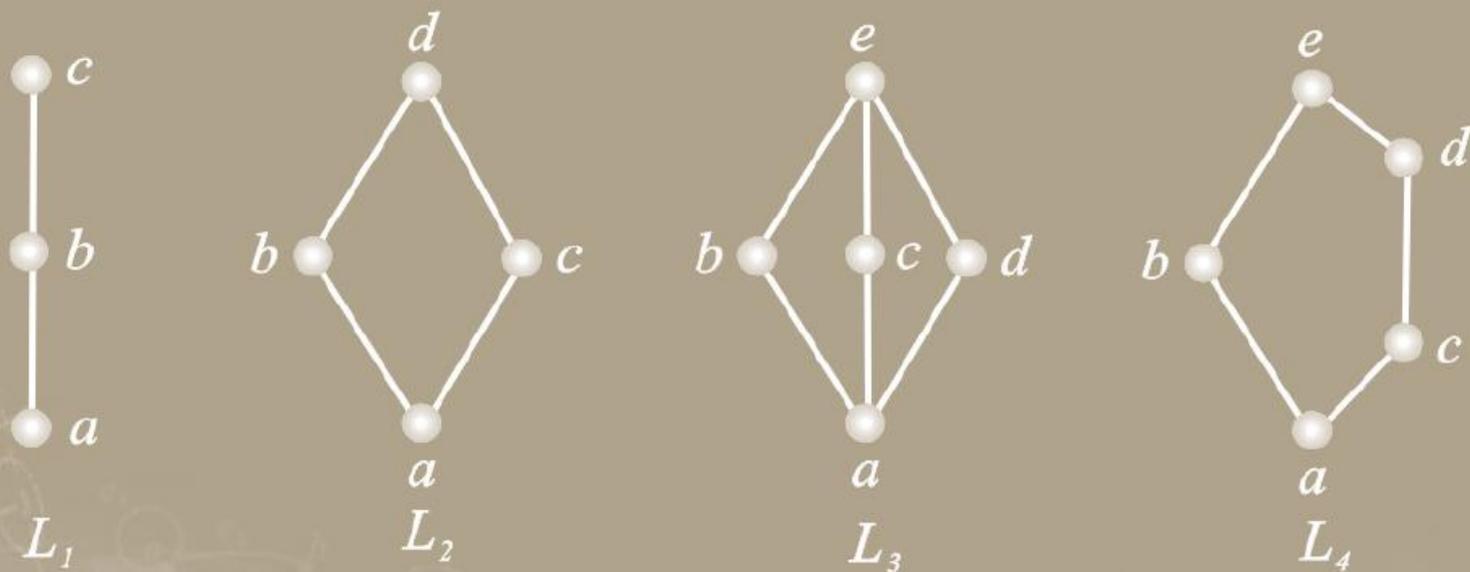


图8

# 补元 (续)

31

## ■ 事实

- 任何有界格中，全上界**1**和全下界**0**互补
- 对于一般元素，可能存在补元，也可能不存在补元
- 补元若存在，则可能唯一，也可能有多个
- 对于有界分配格，补元若存在则唯一

# 补元 (续)

32

- **定理** (有界分配格的补元唯一) : 设  $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$  为有界分配格,  $a \in L$ , 若  $a$  存在补元则其补元**唯一**

- **证明**: 假设  $b, c$  皆为  $a$  之补元, 则有

$$a \vee c = \mathbf{1}, a \wedge c = \mathbf{0}; a \vee b = \mathbf{1}, a \wedge b = \mathbf{0}$$

由于全上界和全下界唯一, 从而有  $a \vee c = a \vee b$

$b, a \wedge c = a \wedge b$ , 由于  $L$  是分配格, 故  $b = c$ .  $\square$

# 有补格

- **定义**（有补格）：设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ 为有界格，若 $L$ 中**所有元素**皆存在补元，则称 $L$ 为**有补格**（complemented lattice）
- **例**：钻石格 $M_3$ 和五角格 $N_5$ 皆为有补格

# 有补分配格

34

- 代数格：结合律、交换律、吸收律、（幂等律）
- 分配格：分配律
- 有界：同一律、（支配律）
- 有补：补律、（双重补律、德摩根律）

# 有补分配格（代数性质）

35

结合律

交换律

分配律

同一律

补律

吸收律

幂等律

支配律

双重补律

德摩根律

# 本节小结

36

- **内容1：代数格的定义与性质**
  - 满足结合律、交换律、吸收律，亦可通过此三性质定义代数格
- **内容2：格同态、格同构**
  - 格同态具有保序性，格同构的充要条件
- **内容3：分配格、有补格、有补分配格**
  - 分配格满足分配率(两个判定定理)，有界格存在全上界和全下届，有补格所有元素存在补元，有补分配格即布尔代数

# 作业

37

- 见课程主页