布尔代数

回顾

- 内容1：代数格的定义与性质
  - 满足结合律、交换律、吸收律，亦可通过此三性质定义代数格
- 内容2：格同态、格同构
  - 格同态具有保序性，格同构的充要条件
- 内容3：分配格、有补格、有补分配格
  - 分配格满足分配率(两个判定定理)，有界格存在全上界和全下届，有补格所有元素存在补元，有补分配格即布尔代数

本节提要

- 内容1：布尔代数
- 内容2：有限布尔代数表示定理

布尔代数的抽象定义

- 一个布尔代数是一个集合B，它有二元运算∨和∧、一元运算¯以及特殊元素0和1，且B中元素满足下列性质：

结合律　交换律　分配律　同一律　补律

- ({0, 1}, +, · , ¯, 0, 1)为布尔代数
- A的幂集构成一个布尔代数(ρ(A), ∪, ∩, ~, ∅, A)

布尔代数性质（1）

等 式	名 称
$x+(y+z)=(x+y)+z$ $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$	结合律
$x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z)$ $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$	分配律
$x+0=x$ $x\cdot 1=x$	同一律
$x+y=y+x$ $x\cdot y=y\cdot x$	交换律
$x+\overline{x}=1$ $x\cdot\overline{x}=0$	补律

布尔代数性质（2）

等　式	名　称
$\overline{\overline{x}} = x$	双重补律
$x+x = x$ $x \cdot x = x$	幂等律
$x+(x \cdot y)=x$ $x \cdot (x+y)=x$	吸收律
$x+1 = 1$ $x \cdot 0 = 0$	支配律
$\overline{(x \cdot y)} = \overline{x} + \overline{y}$ $\overline{(x+y)} = \overline{x} \cdot \overline{y}$	德摩根律

布尔代数和集合运算

- **Any formula involving ∪ or ∩ that holds for arbitrary subsets of a set *S* will continue to hold for arbitrary elements of a Boolean algebra *L* if ∧ is substituted for ∩ and ∨ for ∪ .**

$$(x')' = x \Leftrightarrow \overline{(\overline{A})} = A$$

$$(x \wedge y)' = x' \vee y' \Leftrightarrow \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$(x \vee y)' = x' \wedge y' \Leftrightarrow \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$x \le y \text{ iff. } x \vee y = y \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ iff. } A \cup B = B$$

$$x \le y \text{ iff. } x \wedge y = x \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ iff. } A \cap B = A$$

$$x \vee 0 = x, x \wedge 0 = 0 \Leftrightarrow A \cup \phi = A, A \cap \varphi = \phi$$

$$x \vee 1 = 1, x \wedge 1 = x \Leftrightarrow A \cup S = S, A \cap S = A$$

and more!

布尔代数的性质证明

- 结合律、交换律、分配律、同一律、补律
  - 蕴含：支配律、吸收律、幂等律、双重补律、德摩根律
- 证明支配律： $\forall x \in B,\ x \vee 1=1,\ x \wedge 0=0$
  - $x \vee 1= 1 \wedge (x \vee 1)= (x \vee \bar{x}) \wedge (x \vee 1)= x \vee (\bar{x} \wedge 1)= x \vee \bar{x}=1$
  - $x \wedge 0= 0 \vee (x \wedge 0) =(x \wedge \bar{x}) \vee (x \wedge 0)= x \wedge (\bar{x} \vee 0)= x \wedge \bar{x}=0$

布尔代数的性质证明

- **证明吸收律**
  - $x \vee (x \wedge y) = (x \wedge 1) \vee (x \wedge y) = x \wedge (1 \vee y) = x \wedge 1 = x$
  - $x \wedge (x \vee y) = (x \vee 0) \wedge (x \vee y) = x \vee (0 \wedge y) = x \vee 0 = x$
- **证明幂等律**
  - $x \wedge x = x \wedge (x \vee 0) = x$ （应用同一律、吸收律）

吸收律 ⇒ 幂等律

$x \wedge \underline{x} = x \wedge (\underline{x \vee (x \wedge x)}) = x$ (两次应用吸收律)

布尔代数的性质证明

- 引理：$\forall x, y, z \in B$, 若 $x \wedge z = y \wedge z$ 且 $x \vee z = y \vee z$ ，则 $x = y$
  - $x = x \vee (x \wedge z) = x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ //吸收律/分配律
  - $y = y \vee (y \wedge z) = y \vee (x \wedge z) = (y \vee x) \wedge (y \vee z)$
- 证明双重补律
  - $x \vee \overline{x} = 1 = \overline{\overline{x}} \vee \overline{x}$
  - $x \wedge \overline{x} = 0 = \overline{\overline{x}} \wedge \overline{x}$
  - $x = \overline{\overline{x}}$

布尔代数的性质证明

- 证明德摩根律：$\forall\, x, y \in B, \overline{(x \wedge y)} = \overline{x} \vee \overline{y};$
  - 根据补元的唯一性，只需证明$\overline{x} \vee \overline{y}$是$x \wedge y$的补元。
  - $(x \wedge y) \vee (\overline{x} \vee \overline{y}) = (x \vee \overline{x} \vee \overline{y}) \wedge (y \vee \overline{x} \vee \overline{y}) = 1$
  - $(x \wedge y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y}) = (x \wedge y \wedge \overline{x}) \vee (x \wedge y \wedge \overline{y}) = 0$

布尔代数的性质小结

结合律 交换律 分配律 同一律 补律

吸收律 幂等律 支配律 双重补律 德摩根律

格

布尔代数：有补的分配格

本节提要

- 内容1：布尔代数
  - 满足结合、分配、同一、交换、补律；有补分配格
- 内容2：有限布尔代数表示定理

格中的原子

- 定义：设L是格，L中有最小元(全下界)0，给定元素$a \neq 0$, 若$\forall x \in L$, 有：

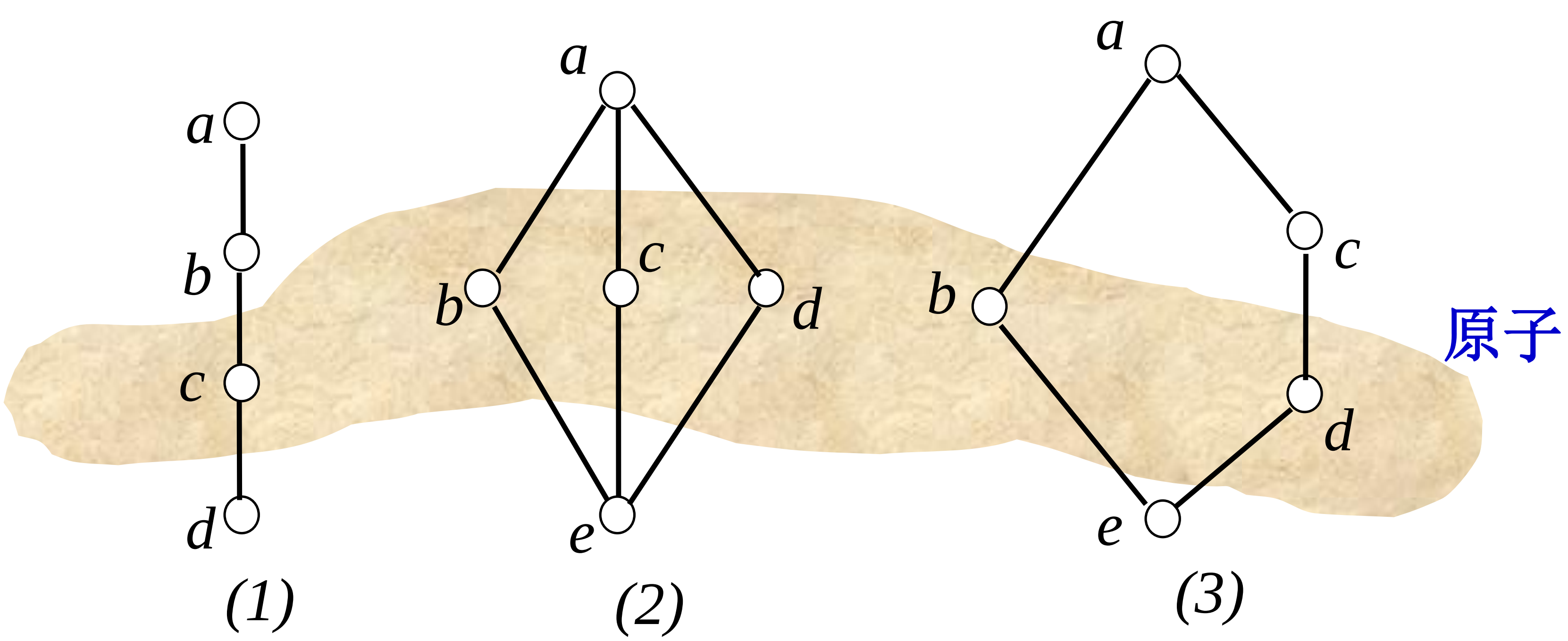
  $$0 \prec x \preccurlyeq a \Rightarrow x=a$$

  则称a是L中的原子

  （原子是覆盖最小元的那些元素。）

- 设a, b是格L中的原子，若$a \neq b$, 则$a \wedge b=0$
  - 假设$a \wedge b \neq 0$, 注意：$a \wedge b \preccurlyeq a$且$a \wedge b \preccurlyeq b$，由原子的定义：$a \wedge b=a$, $a \wedge b=b$, $\therefore a=b$, 矛盾。

格中的原子



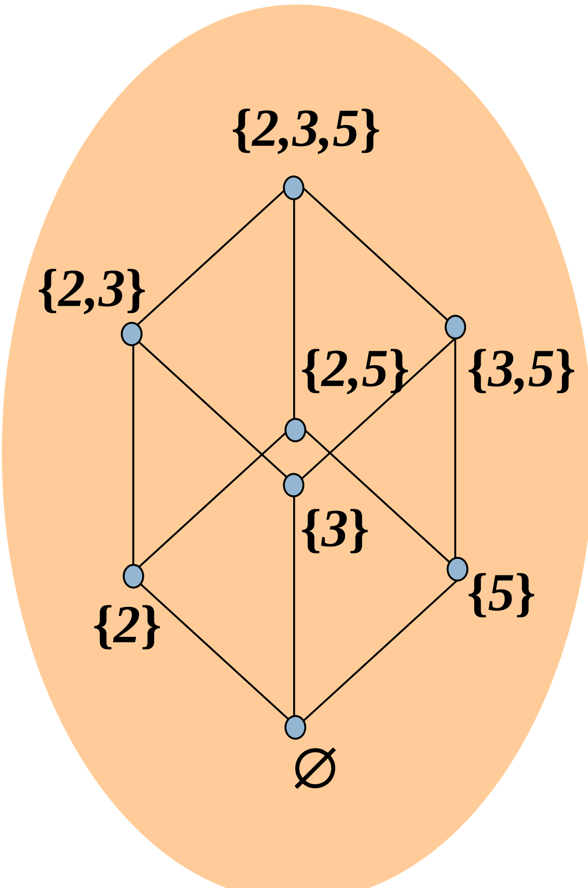
有限布尔代数的表示定理

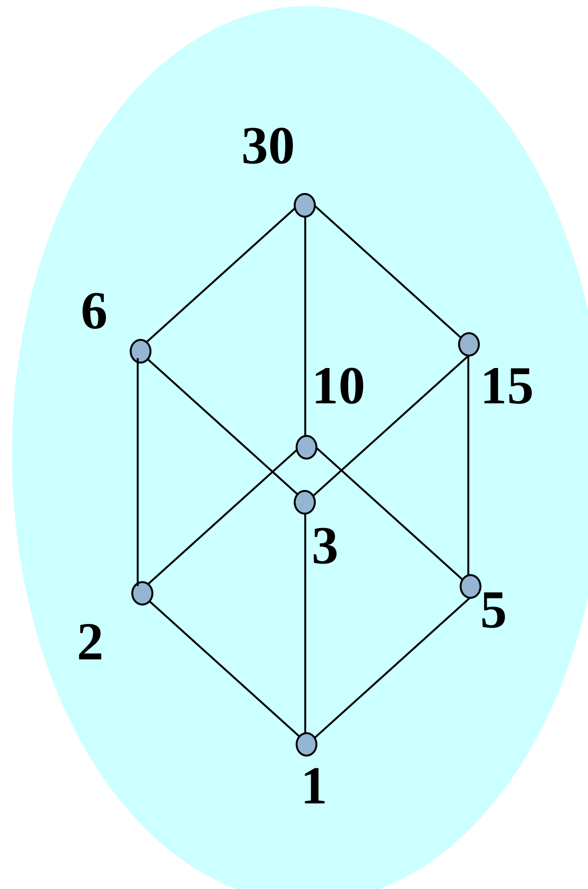
- 任一有限布尔代数B **同构于** B中所有的原子构成的集合A的幂集代数系统P(A)。

  即$(B, \wedge, \vee, ', 0, 1) \cong (P(A), \cap, \cup, \sim, \varnothing, A)$

- 备注*：无限布尔代数不一定有原子

有限布尔代数（示例）





表示定理的推论

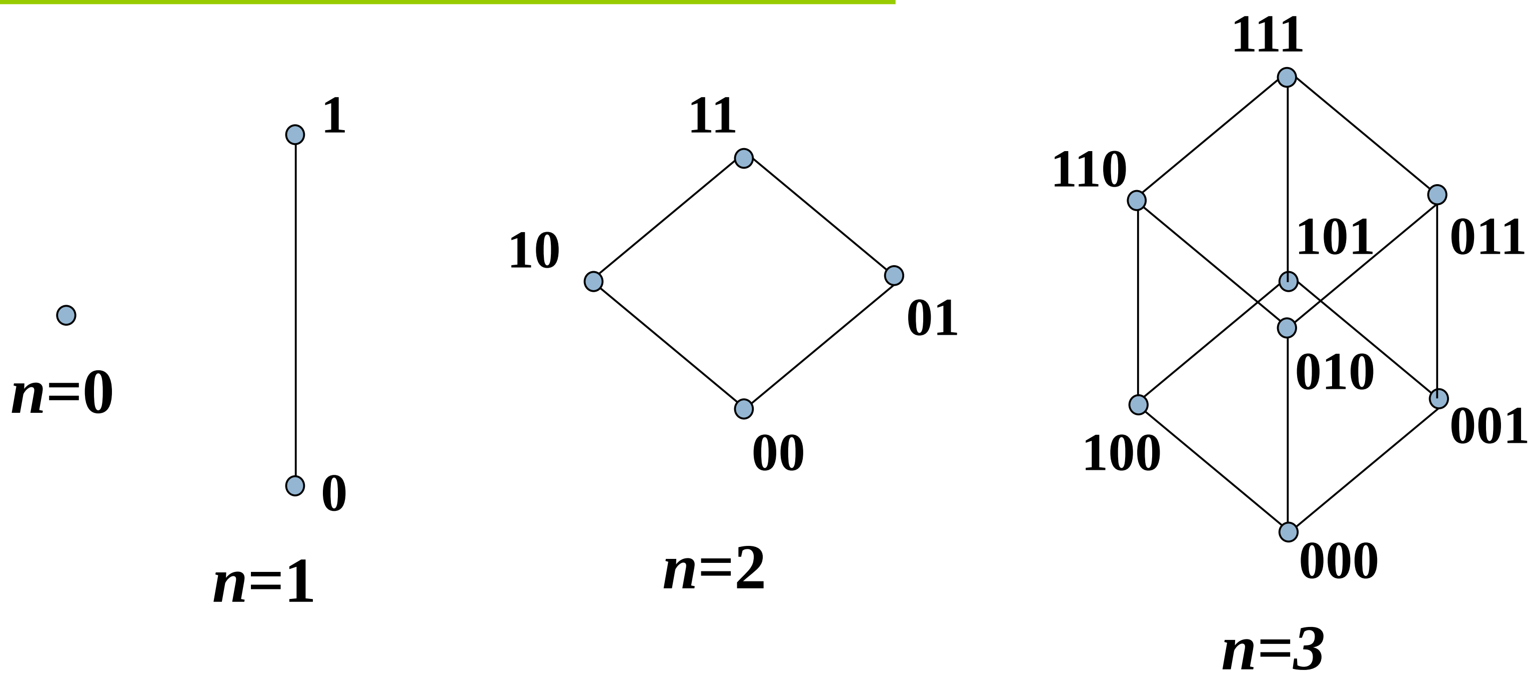
- 任何有限布尔代数的基数为2^n, n是自然数。
  - 设B是有限代数系统，A是B中所有原子的集合。

    则： $B \cong P(A)$, $\therefore |B|=|P(A)|=2^{|A|}$

- 等势的有限布尔代数均同构

有限布尔代数（举例）

与含n个元素的集合的幂集代数系统同构的布尔代数记为B_n



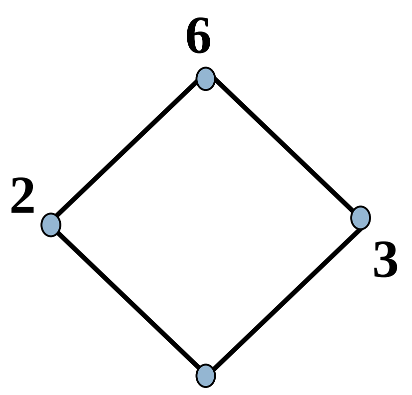
B_n as Product of n B's

- B_1, ({0,1}, ∧, ∨, 1, 0, ’), is denoted as B.
- For any $n \geq 1$, $B_n = B \times B \times \ldots \times B$, where $B \times B \times \ldots \times B$ is given the product partial order：

$$x \leq y \text{ if and only if } x_k \leq y_k \text{ for each } k.$$

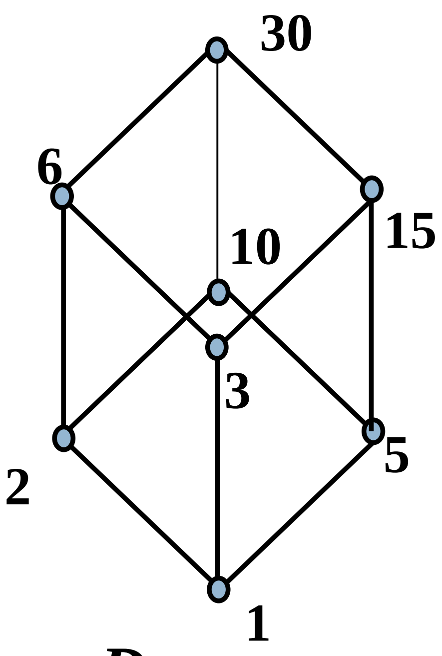
例

D_n is the poset of all positive divisors of *n* with the partial order "divisibility".



D_6

D_{20} is not a Boolean algebra



D_{30}

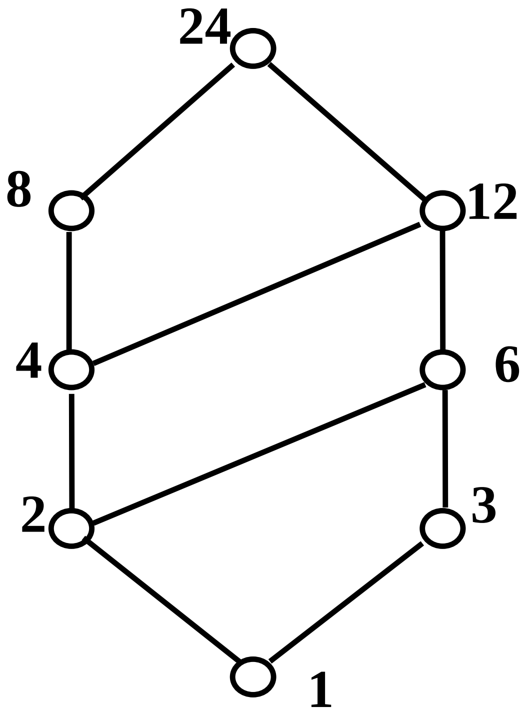
布尔代数D_n

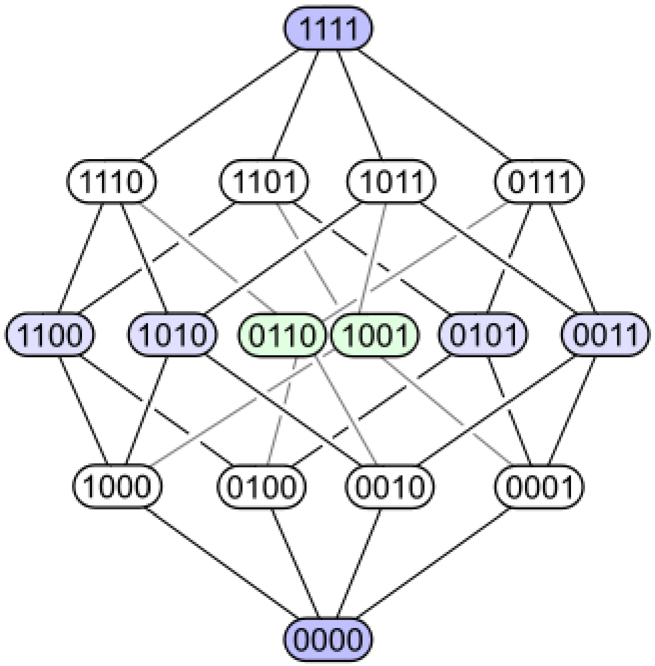
- **Let $n=p_1p_2...p_k$, where the p_i are distinct primes. Then D_n is a Boolean algebra.**
  - **Let $S=\{p_1, p_2, ... p_k\}$, and for any subset T of S, a_T is the product of the primes in T.**
    - **Note: any divisor of n must be some a_T. And we have $a_T|n$ for any T.**
    - **For any subsets V,T, $V\subseteq T$ iff. $a_V|a_T$, *and* $a_V\wedge a_T=\mathrm{GCD}(a_V, a_T)$ and $a_V\vee a_T=\mathrm{LCM}(a_V, a_T)$.**
  - **$f: P(S)\to D_n$ given by $f(T)= a_T$ is an isomorphism from $P(S)$ to D_n.**

非布尔代数D_n

- **If n is a positive integer and $p^2|n$, where p is a prime number, then D_n is not a Boolean algebra.**
- **Proof**
  - **Since $p^2|n$, $n = p^2q$ for some positive integer q. Note that p is also an element of D_n, then if D_n is a Boolean algebra, p must have a complement p', which means GCD(p, p')=1 and LCM(p, p')=n. So, $pp'=n$, which leads to $p'=pq$. So, GCD(p, pq)=1, contradiction.**

下列格是否构成布尔代数?





格、有界、有补、分配？

练习

对于布尔代数(B, +, · , ¯ , 0, 1)，证明：对于B中任意元素x, y，以下四个命题等价：

1）$x \cdot y = x$

2）$x + y = y$

3）$x \cdot \bar{y} = 0$

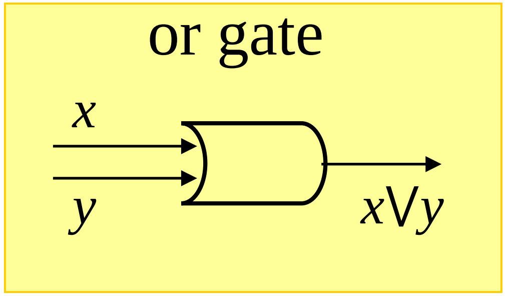
4）$\bar{x} + y = 1$

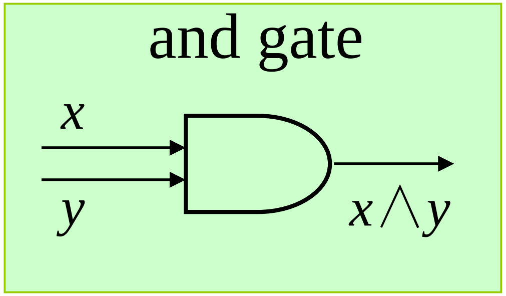
本节提要

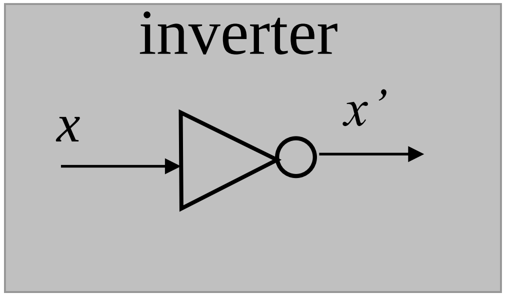
- 内容1：布尔代数
  - 满足结合、分配、同一、交换、补律；有补分配格
- 内容2：有限布尔代数表示定理
  - 任意布尔代数同构于其原子构成集合的幂集代数系统

Logic Diagrams

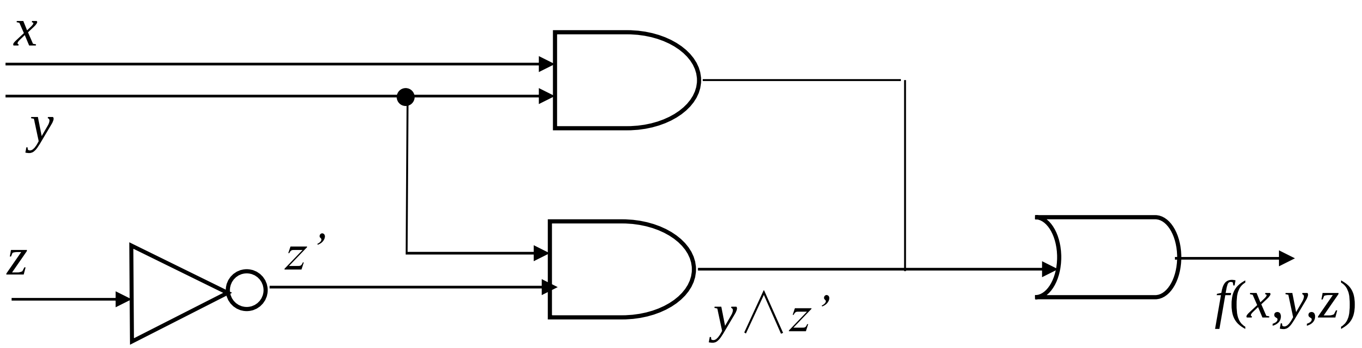
Basic components:







$f(x,y,z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z')$



Karnaugh Map of *f* for *n*=2

$f: B_2 \to B$

Basic positions

00	01
10	11

	y'	y
x'	x'∧y'	x'∧y
x	x∧y'	x∧y

$f(x,y)=(x'\wedge y')\vee(x'\wedge y)$

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

However, we know

$f(x,y)=x'$!

	y'	y
x'	1	1
x	0	0

Simplifying Using Karnaugh Map

$f: B_2 \rightarrow B$

Basic positions

00	01
10	11

	y'	y
x'	$x' \wedge y'$	$x' \wedge y$
x	$x \wedge y'$	$x \wedge y$

$f(x,y)=(x' \wedge y') \vee (x' \wedge y) \vee (x \wedge y')$

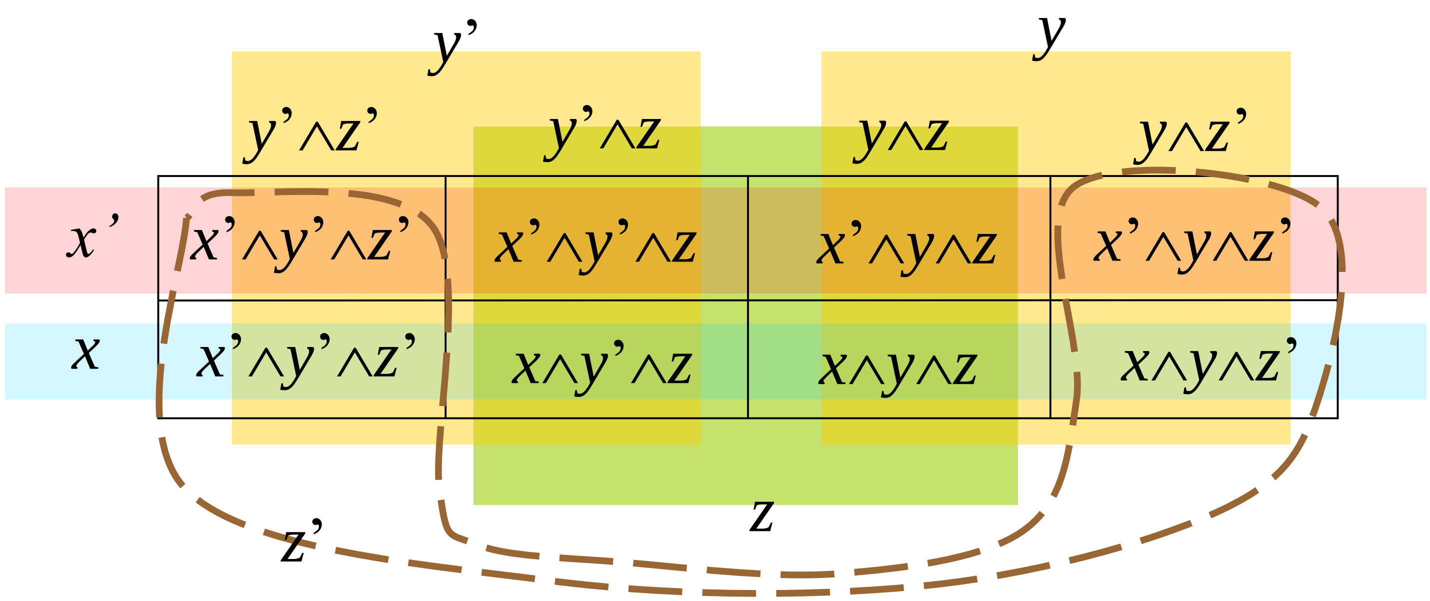
x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$f(x,y) = x' \vee y'$

	y'	y
x'	1	1
x	1	0

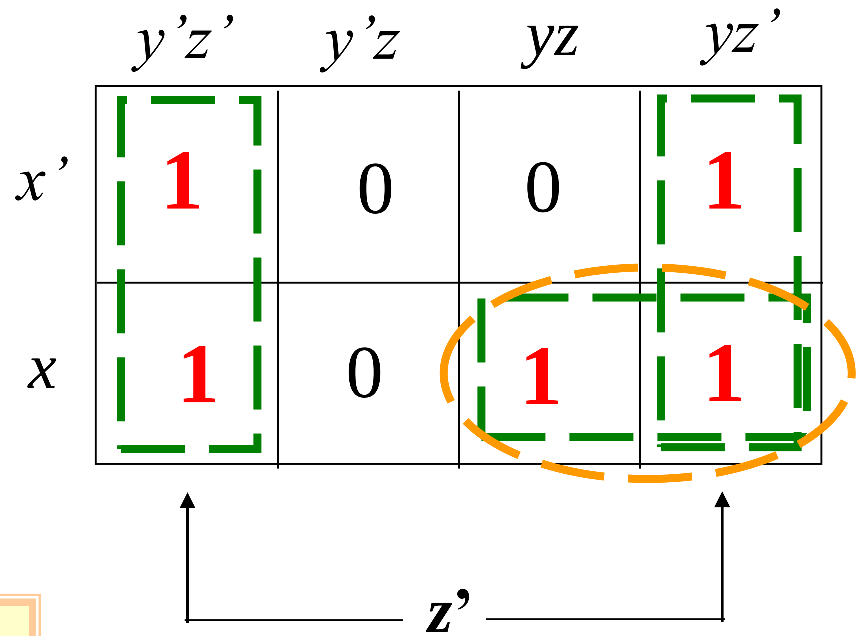
Karnaugh Map with n=3

	00	01	11	10
0	0 0 0	0 0 1	0 1 1	0 1 0
1	1 0 0	1 0 1	1 1 1	1 1 0



Simplifying 3-Variable Expression

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



the expression:

$(x'\wedge y'\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z')\vee$
$(x\wedge y'\wedge z')\vee(x\wedge y\wedge z')\vee(x\wedge y\wedge z)$

So, $z'\vee(x\wedge y)$

Logic Circuit at Work

- **For each try in a contest of weight lifting, it is assumed success only if at least 2 of 3 referees decide it a success. Design a logic circuit for use in the situation.**

The function: $f(x,y,z)$=1 iff. there are at least 2 one's in x,y,z

the expression:

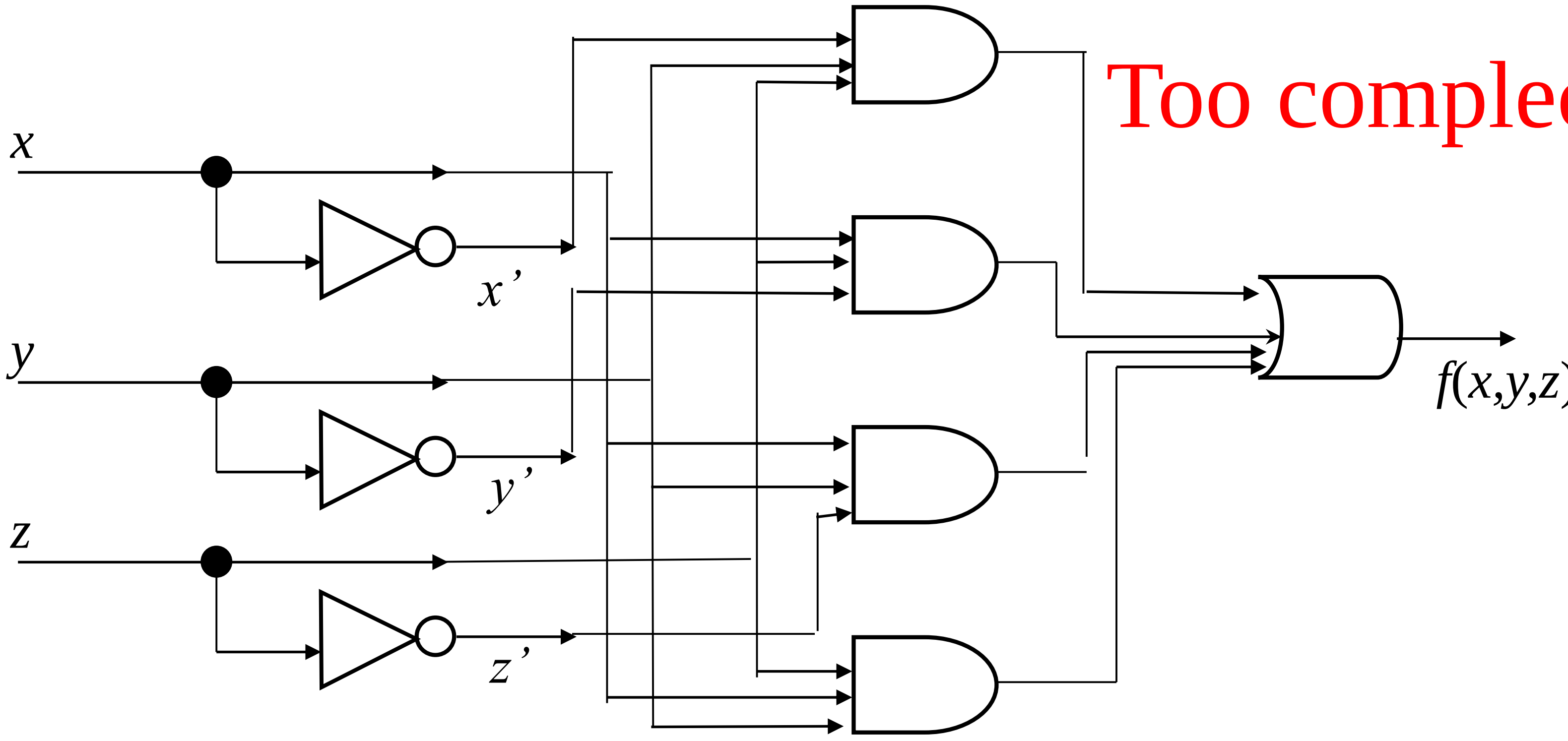
$(x'\wedge y\wedge z)\vee (x\wedge y'\wedge z)\vee (x\wedge y\wedge z')\vee (x\wedge y\wedge z)$

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

The Circuit

the expression:

$(x' \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z)$



Too complecated!

Make it Simpler

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

	$y'z'$	$y'z$	yz	yz'
x'	0	0	**1**	0
x	0	**1**	**1**	**1**

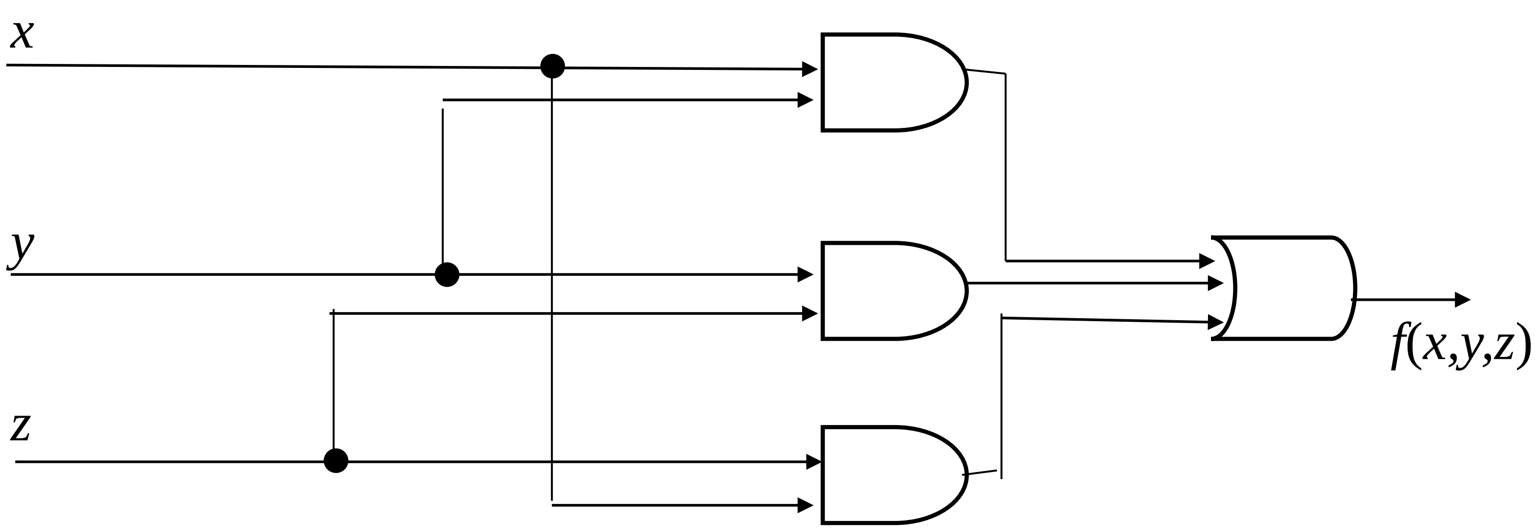
the expression:

$(y \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$

Looks Better

the expression:

$(y \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$



作业

- 见课程主页