谓词逻辑初步

回顾

问题1：什么是命题逻辑?

- 与命题真假有关的判断

问题2：如何判断命题表达式的真假?

- 真值表与逻辑等价

问题3：如何判定命题可满足?

- **NPC**完全问题；范式与主范式

本节提要

问题1：如何基于命题逻辑进行推理?
问题2：什么是(一阶)谓词逻辑?
问题3：如何基于谓词逻辑进行推理?

引例

- 如果税收下降，收入一定上升。现在我的收入上升了，所以，一定是税收下降了！
- 定义命题P：税收下降；命题Q：收入上升
- 前提：
  - $P \rightarrow Q$；Q
- 结论：
  - P
- 推理过程：
  - ?

推理过程的不正确，
不能保证任何结果的正确性

引例

- 小王不管上不上学都不睡觉，小王今天睡觉了。所以小王即上学又不上学。
- **P**: 小王上学，**Q**：小王睡觉
- 前提：
  - $(P \vee \neg P) \rightarrow \neg Q$； Q
- 结论：
  - $P \wedge \neg P$

推理正确，结论有效；
前提不一致导致结论不正确

推理规则

- 前提：一组命题公式$A_1, A_2, \ldots, A_k$
- 结论：一个命题公式B
- “推理正确”当且仅当：

  $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \to B$是永真式

- 说明：
  - B称为一个有效结论
  - 对诸A_i和B中出现的命题变元的任一指派，若前提的合取式为真，则结论必为真
  - 若前提的合取式为假，推理总是正确，或者说，推理正确并不保证结论正确

例

消解 $A \vee B, \neg A \vee C \Rightarrow B \vee C$

常用的蕴涵永真式

蕴含永真式在逻辑推理中相当重要

1. $A \to (A \vee B)$
2. $(A \wedge B) \to A$
3. $((A \to B) \wedge A) \to B$
4. $((A \to B) \wedge \neg B) \to \neg A$
5. $((A \vee B) \wedge \neg B) \to A$
6. $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$
7. $((A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C)) \to (A \leftrightarrow C)$
8. $((A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C)) \to (B \vee D)$

   $((A \to B) \wedge (\neg A \to B)) \to B$
9. $((A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D)) \to (\neg A \vee \neg C)$

蕴涵永真式与导出的推理规则

附加律	1. $A \Rightarrow (A \vee B)$
化简律	2. $(A \wedge B) \Rightarrow A$
假言推理	3. $((A \to B) \wedge A) \Rightarrow B$
取拒式	4. $((A \to B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$
析取三段论	5. $((A \vee B) \wedge \neg B) \Rightarrow A$
假言三段论	6. $((A \to B) \wedge (B \to C)) \Rightarrow (A \to C)$
等价三段论	7. $((A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C)) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$
构造性二难	8. $((A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C)) \Rightarrow (B \vee D)$
	$((A \to B) \wedge (\neg A \to B)) \Rightarrow B$
破坏性二难	9. $((A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D)) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$

论证

- An ***argument*** **in propositional logic is a sequence of propositions. All but the final proposition in the argument are called** ***premises*** **and the final proposition is called the** ***conclusion*****. An argument is** ***valid*** **if the truth of all its premises implies that the conclusion is true.**

"如果我是马云，那么我给各位每人发一辆法拉利。"

"我是马云。"

∴"我给各位每人发一辆法拉利。"

论证形式

- An ***argument form*** **in propositional logic is a sequence of compound propositions involving propositional variables. An argument form is** ***valid*** **no matter which particular propositions are substituted for the propositional variables in its premises, the conclusion is true if the premises are all true.**

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore \quad q \end{array}$$

论证过程

- 从前提$A_1, A_2, \ldots, A_k$为真出发，推出结论B为真的论证过程是一个表达式序列，该序列最后一个表达式应是要证明的结论，而其它任一表达式满足如下的条件：
  - 它可以是任意一个永真式；
  - 它可以是$\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$中的任何一个表达式；
  - 可以是序列中前面的任一表达式通过应用“替换规则”得到的表达式（适用于谓词逻辑）；
  - 可以是对序列中前面任意一个或若干个表达式应用推理规则得到的新表达式
    - 例如：$A, (A \to B)$得到B

用推理规则建立论证

- 已知 $(p\wedge q)\vee r$ 和 $r\rightarrow s$ 为真，那么 $p\vee s$ 是否为真?

$$(p\wedge q)\vee r \equiv (p\vee r)\wedge (p\vee q)$$

$$r\rightarrow s \equiv \neg r\vee s$$

$p\vee r$ 化简

$p\vee s$ 消解

消解：$r\vee p, \neg r\vee s \Rightarrow p\vee s$

用推理规则建立论证

- “今天下午不出太阳并且比昨天冷”,“只有今天下午出太阳,我们才去游泳”,“若我们不去游泳,则我们将乘独木舟游览”,“若我们乘独木舟游览,则我们将在黄昏时回家”,结论“我们将在黄昏时回家”。

p: 今天下午出太阳，q: 今天比昨天冷，r: 我们将去游泳，

s: 我们将乘独木舟游览，t: 我们将在黄昏时回家。

- $\neg p \wedge q$
- $r \rightarrow p$
- $\neg r \rightarrow s$
- $s \rightarrow t$

$\neg p$ 化简

$\neg r$ 取拒式

s 假言推理

t 假言推理

本节提要

问题1：如何基于命题逻辑进行推理?

- 蕴含永真式与推理规则

问题2：什么是(一阶)谓词逻辑?

问题3：如何基于谓词逻辑进行推理?

引例

- 人都要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底要死的

- brother(x, y) $\wedge$father(y, z) → uncle(x, z)
- father(x, y) $\wedge$father(y, z) → grandfather(x, z)

- 命题逻辑无法处理上述推理！

谓词（Predicate）

- 如果 x 是整数，“x 大于2” 不是命题，它的真值依赖于 x 的取值
  - 可以将 “x 大于2”表示为 P(X)。
- 谓词：P(x)可以视同关于x的一个属性的取值(一个函数)
  - P 的定义域是整数集，其值域是 { T, F }
  - P(3)是一个取值为 T 的命题
  - “for all X, P(X)” 是一个取值为 F 的命题
  - “存在一个X，P(X)” 是一个真值为 T 的命题

量词（Quantifier）

- 若P(x) 是谓词，∀xP(x)表示 “对所有的x, P(x)” ∀称为 全称量词
- 若P(x) 是谓词，∃xP(x)表示 “存在某个x, P(x)” ∃称为 存在量词

  - 例：P(x)表示x>2，∀xP(x)为假， ∃xP(x)为真
  - 注1：量词必须指定论域（默认为实数域）
  - 注2：当论域元素可以一一列出时，量词（谓词公式）可以转化成命题公式的合取、析取范式
  - 注3：量词的优先级高于其它逻辑运算符

量词的论域

- 符号化以下语句：
  - P(x)表示$x^2>0$，$\forall x P(x)$的真值？
  - 有的政治家诚实
  - 所有美国人都喜欢汉堡包

量词的作用域

- 观察量化表达式：
  - $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$
  - $\forall x P(x) \wedge Q(x)$
  - $\forall x(P(x,y) \wedge Q(x,y))$
  - $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
  - $\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)$

  - 量化表达式中的变元：绑定、自由、作用域、替换

量化表达式的逻辑等价

- 逻辑表达式的逻辑等价：
  都有相同的真值，无论变量设定在哪个论域上，无论什么谓词代入。

- 例：
  - $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
  - $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

量化表达式的否定式

- $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
- 对所有的x, x的平方是正数
- 否定：存在某个实数 x, 其平方不是正数。

- $\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$
- 存在x, 满足 $5x=x$.
- 否定：对任意的x, $5x\neq x$.

练习：表达语句$\forall x \exists y (xy=1)$的否定

嵌套量词

- $\forall x \forall y P(x,y) \equiv \forall y \forall x P(x,y)$

  举例：$P(x,y)$ **表示** $x+y=y+x$。**论域为实数集**

- $\exists x \exists y P(x,y) \equiv \exists y \exists x P(x,y)$

  举例： $P(x,y)$ **表示**$x=y+1$。

- $\forall x \exists y P(x,y)$ 与 $\exists y \forall x P(x,y)$ 不一定等价

  举例：$P(x,y)$ **表示** “$y>x$” 。

将自然语言翻译成逻辑表达式

这个班上的每个学生都学过微积分课程.

$S(x)$: x是这个班上的，$C(x)$: x学过微积分课程

$\forall x\,(S(x)\rightarrow C(x))$

这个班上某些人去过墨西哥；这个班上每个学生都或去过加拿大，或去过墨西哥.

$\exists x(S(x) \rightarrow M(x))$ or $\exists x(S(x) \wedge M(x))$?

$\forall x\,(S(x)\rightarrow V(x, \text{加拿大}) \vee V(x, \text{墨西哥})\,)$

练习：所有狮子都是凶猛的，有些狮子不喝咖啡。

将自然语言翻译成逻辑表达式

- 如果一个人是女性且是家长，则她是某人的母亲

  $\forall x((F(x)\wedge P(x)) \rightarrow \exists y M(x,y))$

  $\forall x \exists y((F(x)\wedge P(x)) \rightarrow M(x,y))$

将自然语言翻译成逻辑表达式

在 n 与 $2n$ 之间存在素数 (Tschebyscheff定理):

- $\forall n(\mathrm{N}(n) \rightarrow \exists x(\mathrm{N}(x) \wedge (x \geq n) \wedge (x \leq 2n) \wedge \forall y(y \mid x \rightarrow (y=1 \vee y=x))))$

定义: $\mathrm{N}(x)$: x 是正整数;

$y \mid x$: y 整除 x

练习: "不存在最大的素数。"

例：苏格拉底到底死不死?

- $P(x)$: x是人；$Q(x)$：x要死
- 符号化及推理过程：
  - 人都是要死的：$\forall x(P(x) \to Q(x))$

$$P(苏格拉底) \to Q(苏格拉底)$$

苏格拉底是人：$P(苏格拉底)$

$$\therefore Q(苏格拉底)$$

本节提要

问题1：如何基于命题逻辑进行推理?

- 蕴含永真式导出推理规则

问题2：什么是(一阶)谓词逻辑?

- 命题逻辑+谓词+量词；量化表达式

问题3：如何基于谓词逻辑进行推理?

引例：老钱该不该来?

- 推理的样例
  - 老张请小刘和老钱吃饭。 他和老钱先到饭店，等了好久小刘还没有到。老张自言自语说：“哎，该来的还没来。”老钱听了不高兴了：“哦，原来我是不该来的? 那我走吧。”
  - 问题：
    - 如果你是老钱，你会不高兴吗? 你的不高兴，有道理吗?

引例：老钱该不该来?

定义谓词：

P(x):x该来；Q(x):x来了

∀：全称量词，表示“对所有的”

- 前提：
  - 该来的还没有来
    - $\forall x(P(x)\rightarrow\neg Q(x))$ -------（1）
  - 老钱来了
    - Q(老钱) -------（2）
- 推理过程
  - (1) ⇒ P(老钱)→
  - (3)+(2) ⇒ ¬
- 结论：
  - 老钱不该来！

老钱其实完全可以来！

问题出在哪里？

推理过程？正确！

前提？前提有误！

引例：老钱可以来

- 前提：
  - “该来的还没有来”改成“还有一个该来的还没有来”
    - $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$------- （1）
  - 老钱来了
    - Q(老钱) ------- （2）
- 推理过程
  - (1) ==> P(小刘) ∧ ¬Q(小刘)
- 结论：
  - 老钱可以来！

量化表达式的推理规则

- 全称例示：　$\forall x P(x) \Rightarrow P(c)$
- 全称生成：　$P(c)$,任意$c \Rightarrow \forall x P(x)$
- 存在例示：　$\exists x P(x) \Rightarrow$ 对某个c, $P(c)$
- 存在生成：　对某个c, $P(c) \Rightarrow \exists x P(x)$

用推理规则建立论证

- "在这个班上的某个学生没有读过这本书"，"班上的每个人都通过了第一门考试"，结论"通过第一门考试的某个人没有读过这本书"。
- $C(x)$: x在这个班上
- $B(x)$: x读过书了
- $P(x)$: x通过了第一门考试
  - $\exists x(C(x) \land \neg B(x))$
  - $\forall x(C(x) \to P(x))$
  - $\exists x(P(x) \land \neg B(x))$

$C(a) \land \neg B(a)$	存在例示
$C(a)$	化简
$C(a) \to P(a)$	全称例示
$P(a)$	假言推理
$\neg B(a)$	化简
$\exists x(P(x) \land \neg B(x))$	存在生成

例

- 以下推论正确吗?
  - 有人喜欢喝茶，有人喜欢喝酒
  - 因此，有人既喜欢喝茶又喜欢喝酒
- 令：**A(x)：x**喜欢喝茶；**B(x)：x**喜欢喝酒
- 推理如下：
- **1.** $\exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$ **Premise**
- **2.** $\exists xA(x)$ 化简, **1**
- **3.** $\exists xB(x)$ 化简, **1**
- **4.** $A(c)$ 例示, **2**
- **5.** $B(c)$ 例示, **3**
- **6.** $A(c) \wedge B(c)$ 合取, **4,5**
- **7.** $\exists x(A(x) \wedge B(x))$ 生成, **6**

练习

- 用命题逻辑，将下列推理形式化，并对正确的推理给出推理过程，要指明所假设命题的含义
  - 若小张喜欢数学，则小赵或小李也喜欢数学。若小李喜欢数学，他也喜欢物理。小张确实喜欢数学，可小李不喜欢物理。所以小赵喜欢数学

- 用谓词逻辑，将下列推理形式化，并对正确的推理给出推理过程，要指明所假设命题或谓词的含义
  - 人都喜欢吃蔬菜，但说所有人都喜欢吃鱼是不对的，所以存在只喜欢吃蔬菜而不喜欢吃鱼的人

本节小结

问题1：如何基于命题逻辑进行推理?

- 蕴含永真式导出推理规则

问题2：什么是(一阶)谓词逻辑?

- 命题逻辑+谓词+量词；量化表达式

问题3：如何基于谓词逻辑进行推理?

- 命题逻辑的推理+全称/存在 例示/生成

作业

- 见课程主页

附录

命题逻辑的正确性和完备性

- 语义蕴涵 （Semantic entailment）
  - 给定前提 $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$, 结论$\phi$成立
  - $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \phi$
  - $\vDash ((\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \rightarrow \phi)$

- 自然演绎规则是正确的，完备的

$\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \phi$ **is valid** ***iff*** $\phi_1, \ldots, \phi_n \vDash \phi$ **holds**

基于自然演绎规则的推导	基于真值表的语义蕴涵

一阶谓词逻辑的可判定性

自然演绎规则（含量词相关的）是正确的、完备的

不可判定的（**undecidable**）

No program exists which, given any ϕ, decides whether $\models \phi$

停机问题

- 停机问题就是判断任意一个程序是否能在有限的时间之内结束运行的问题
  - 该问题等价于如下的判定问题：是否存在一个程序P，对于任意输入的程序w，能够判断w会在有限时间内结束或者死循环。

  - 反证法：假设存在这样的判定程序halt()，定义g如下，

```
def g():
    if halt(g):
        loop_forever()
```

如果halt(g)停止则g死循环；如果halt(g)死循环则g停止；导出矛盾。

哥德尔不完备性定理

- **逻辑系统**可具有下列性质：
  1, 有效性(validity):依系统的推理规则，若所有前提皆为真则结论必为真（保真）。
  2, 相容性(consistency):系统中任一定理都不与其他定理相矛盾。不存在命题P，P和非P皆可在系统中证明。
  3, 可靠性(soundness):系统中所有定理（有效且可证明的命题）皆为真。可靠性与完备性互为逆命题。
  4, 完备性(completeness):系统中不存在无法证明或证否的有效命题。系统中真命题皆可证明（真命题皆为定理）且假命题皆可证否。

哥德尔证明了没有标准的算术形式系统可以同时满足相容性和完备性

哥德尔不完备性第一定理：**任意一个包含一阶谓词逻辑与初等数论的形式系统，都存在一个命题，它在这个系统中既不能被证明为真，也不能被证明为否。**