欧拉图与汉密尔顿图

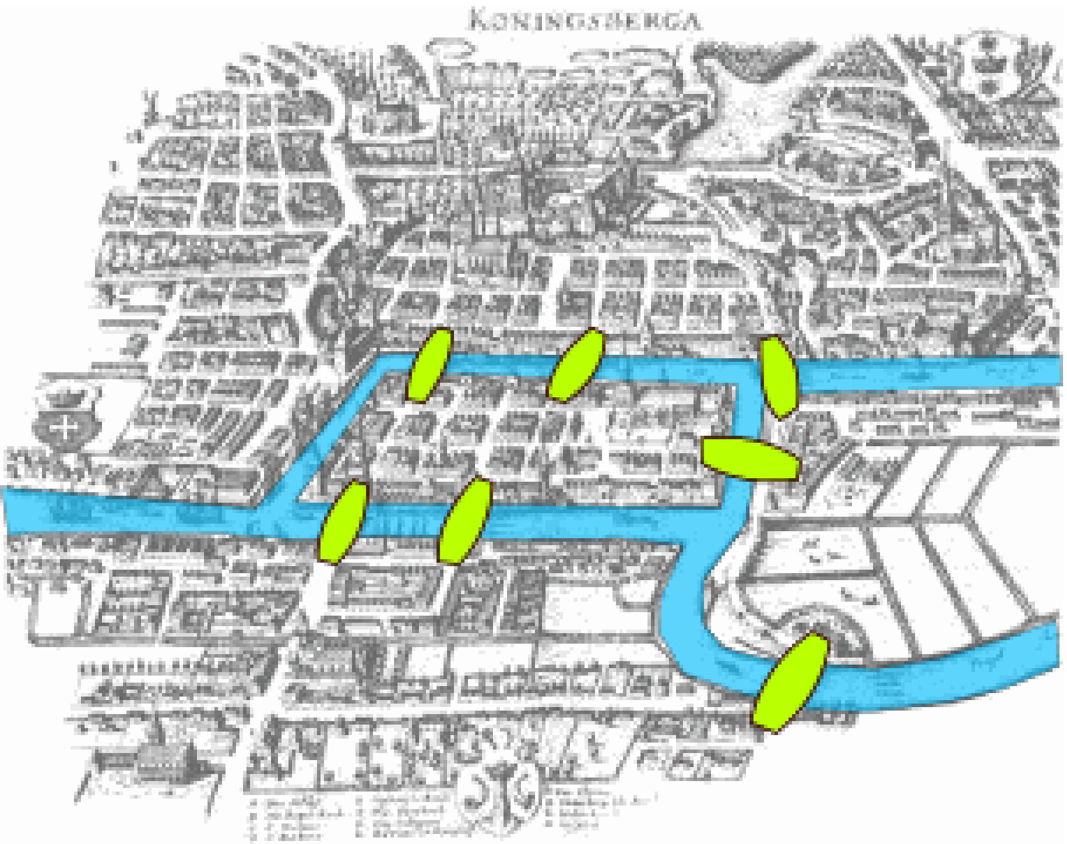
回顾

- 内容1：通路与回路
  - 简单通路边不重复、初级通路点不重复
- 内容2：无向图的连通性
  - 割点、割边，点/边连通度、$\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$，Whitney定理
- 内容3：有向图的连通性
  - 强/单/弱连通，无向图的边定向

本节提要

- 内容1：欧拉图
  - 什么是欧拉图?
  - 欧拉图的充要条件?
  - 如何构造欧拉回路?
- 内容2：哈密尔顿图
  - 什么是汉密尔顿图?
  - 哈密尔顿图的必要和充分条件?
  - 哈密尔顿图有哪些应用?

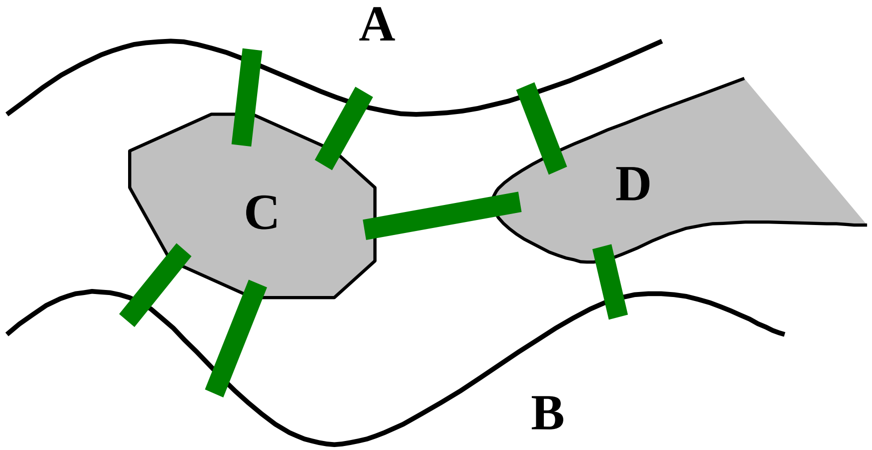
Königsberg七桥问题（回顾）

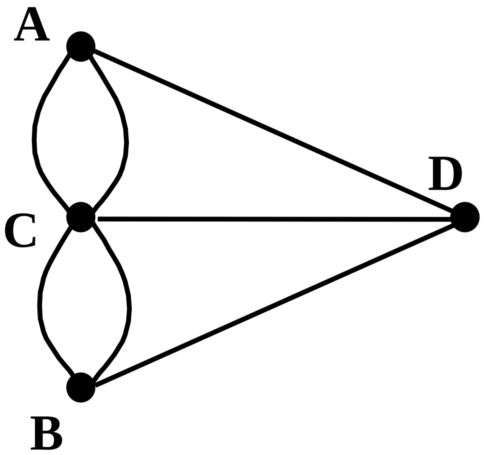


Leonhard Euler (1707 – 1783)

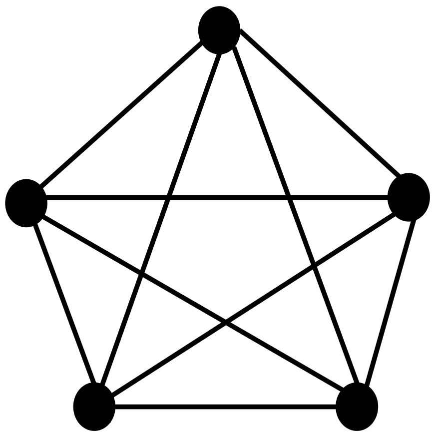
Königsberg七桥问题（回顾）

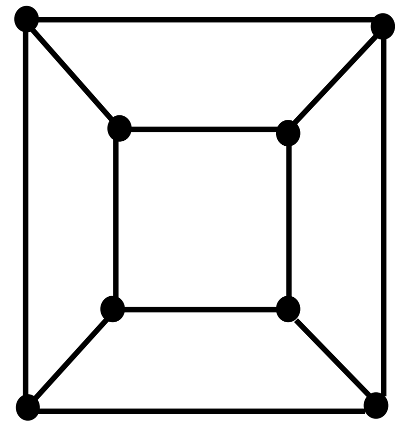
- 问题的抽象：
  - 用顶点表示对象-“地块”
  - 用边表示对象之间的关系-“有桥相连”
  - 原问题等价于：“右边的图中是否存在包含每条边一次且恰好一次的回路？”

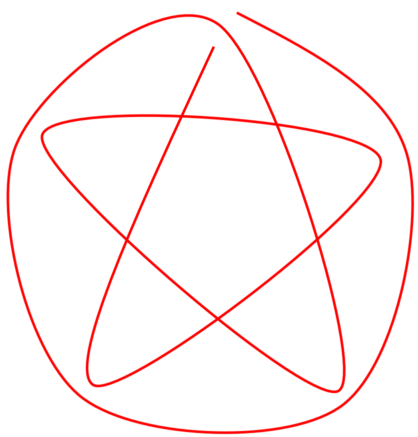




“一笔划”问题







?

欧拉通路和欧拉回路

- 定义：包含图（无向图或有向图）中每条边的简单通路称为*欧拉通路*。

注意：欧拉通路是简单通路（边不重复），但顶点可重复

- 定义：包含图中每条边的简单回路称为*欧拉回路*。
- 如果图G中含欧拉回路，则G称为*欧拉图*。如果图G中有欧拉通路，但没有欧拉回路，则G称为*半欧拉图*。

//备注：通常假设G是连通的。

欧拉图的充要条件

- 连通图G是欧拉图 当且仅当 G中每个顶点的度数均为偶数。
  - 证明:

⇒设C是G中的欧拉回路，则$\forall v \in V_G$, $d(v)$必等于v在C上出现数的2倍(起点与终点看成出现一次)。

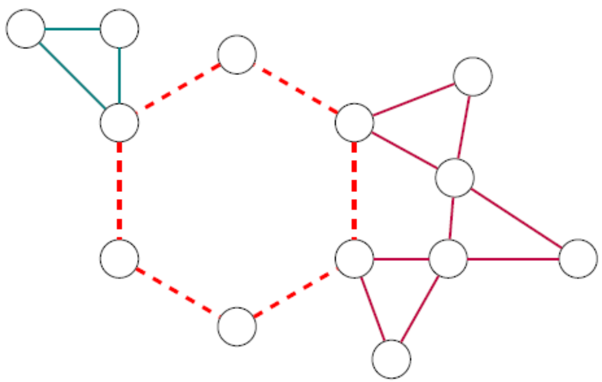
⇐可以证明:

（1）G中所有的边可以分为若干边不相交的简单回路。

（2）这些回路可以串成一个欧拉回路。

欧拉图的充要条件

- (1) 若图G中任一顶点均为偶度点，则G中所有的边包含在若干边不相交的简单回路中。



- 证明：对G的边数m施归纳法。
  - 当m=1, G是环，结论成立。
  - 对于$k\geq 1$，假设当$m\leq k$时结论成立。
  - 考虑$m=k+1$的情况：注意$\delta_G\geq 2$, G中必含简单回路，记为C，令G’$=G-E_C$, 设G’中含s个连通分支。显然，每个连通分支内各点均为偶数(包括0)，且边数不大于k。则根据归纳假设，每个非平凡的连通分支中所有边含于没有公共边的简单回路中，注意各连通分支以及C两两均无公共边，于是，结论成立。

欧拉图的充要条件

- (2) 若连通图G中所有的边包含在若干边不相交的简单回路中，则G中含欧拉回路。
  - 证明：对G中简单回路个数d施归纳法。当d=1时显然。
  - 假设$d \le k(k \ge 1)$时结论成立。考虑$d=k+1$.
  - 按某种方式对k+1个简单回路排序，令G’=G-E(C_{k+1})，设G’中含s个连通分支，则每个非平凡分支所有的边包含在相互没有公共边的简单回路中，且回路个数不大于k。由归纳假设，每个非平凡连通分支G_i均为欧拉图，设其欧拉回路是C_i'。因G连通，故C_{k+1}与诸C_i'都有公共点。
  - G中的欧拉回路构造如下：从C_{k+1}上任一点(设为v_0)出发遍历C_{k+1}上的边，每当遇到一个尚未遍历的C_i'与C_{k+1}的交点(设为v_i'), 则转而遍历C_i'上的边，回到v_i'继续沿C_{k+1}进行。

关于欧拉图的等价命题

- 设G是非平凡连通图，以下三个命题等价：

(1) G是欧拉图。

(2) G中每个顶点的度数均为偶数。

(3) G中所有的边包含在相互没有公共边的简单回路中。

半欧拉图的判定

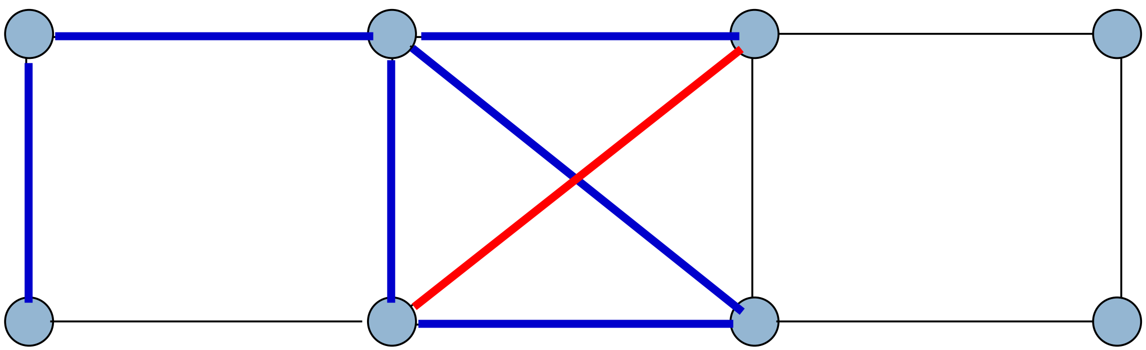
- 设G是连通图，G是半欧拉图 当且仅当 G恰有两个奇度点。
  - 证明:

$\Rightarrow$ 设P是G中的欧拉通路(非回路)，设P的始点与终点分别是u,v, 则对G中任何一点x, 若x非u,v，则x的度数等于在P中出现次数的2倍，而u,v的度数则是它们分别在P中间位置出现的次数的两倍再加1。

$\Leftarrow$ 设G中两个奇度顶点是u,v, 则G+uv是欧拉图，设欧拉回路是C, 则C中含uv边，$\therefore$ C-uv是G中的欧拉通路。(这表明：如果试图一笔画出一个半欧拉图，必须以两个奇度顶点为始点和终点。)

构造欧拉回路

思想：在画欧拉回路时，已经经过的边不能再用。因此，在构造欧拉回路过程中的任何时刻，假设将已经经过的边删除，剩下的边必须仍在同一连通分支当中。



构造欧拉回路-Fleury算法

- 算法：
  - 输入：欧拉图G
  - 输出：简单通路$P = v_0e_1v_1e_2,\cdots,e_iv_ie_{i+1},\cdots,e_mv_m$，其中包含了$E_G$中所有的元素。

1. 任取$v_0 \in V_G$, 令$P_0=v_0$;
2. 设$P_i=v_0e_1v_1e_2,\cdots,e_iv_i$，按下列原则从$E_G-\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$中选择$e_{i+1}$。
   (a) e_{i+1}与v_i相关联；
   (b) 除非别无选择，否则e_{i+1}不应是$G-\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$中的割边。
3. 反复执行第2步，直到无法执行时终止。

Fleury算法的证明

- 算法的终止性显然。
- 设算法终止时，$P_m = v_0e_1v_1e_2,\cdots,e_iv_ie_{i+1},\cdots,e_mv_m$,
- 其中诸e_i互异是显然的。只须证明：

  (1) P_m是回路，即$v_0=v_m$。

  (2) P_m包括了G中所有的边。

令$G_i=G-\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$

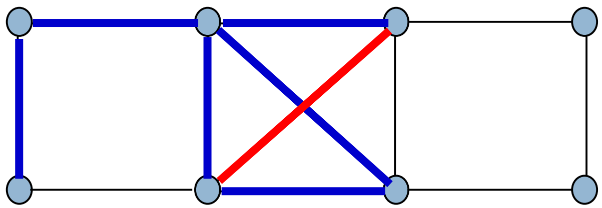
(1) (证明是回路)假设$v_0\neq v_m$。由算法终止条件，在G_m中已没有边与v_m相关联。假设除最后一次外，v_m在P_m中出现k次，则v_m的度数是$2k+1$, 与G中顶点度数是偶数矛盾。

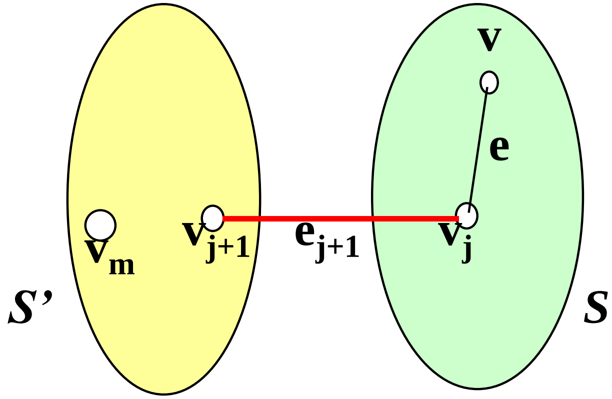
Fleury算法的证明

(2) (证明含所有边)假设P_m没有包括G中所有的边，令G_m中所有<u>非零度顶点</u>集合为S（非空），令$S'=V_G-S$, 则$v_m\in S'$。

考察序列$e_1,e_2,\cdots e_j,e_{j+1},\cdots,e_m$。假设j是满足$v_j\in S$, 而$v_{j+1}\in S'$ 的最大下标。因为P_m的终点在S' 中，因此e_{j+1}一定是G_j中的割边。

令e是在G_j中与v_j相关联的异于e_{j+1}的边(非零度点一定有)，根据算法选择e_{j+1}(割边)的原则，e也一定是割边。但是，G_m中任意顶点的度数必是偶数，e在G_m中的连通分支是欧拉图，e在G_m的某个欧拉回路中，不可能是G_j的割边。矛盾。





有向欧拉图

- 有向图中含所有边的有向简单回路称为有向欧拉回路。
- 含有向欧拉回路的有向图称为有向欧拉图。

下面的等价命题可以用于有向欧拉图的判定:

- 若G是弱连通的有向图，则下列命题等价:
  - G中含有向欧拉回路。
  - G中任一顶点的入度等于出度。
  - G中所有的边位于若干个边互不相交的有向简单回路当中。

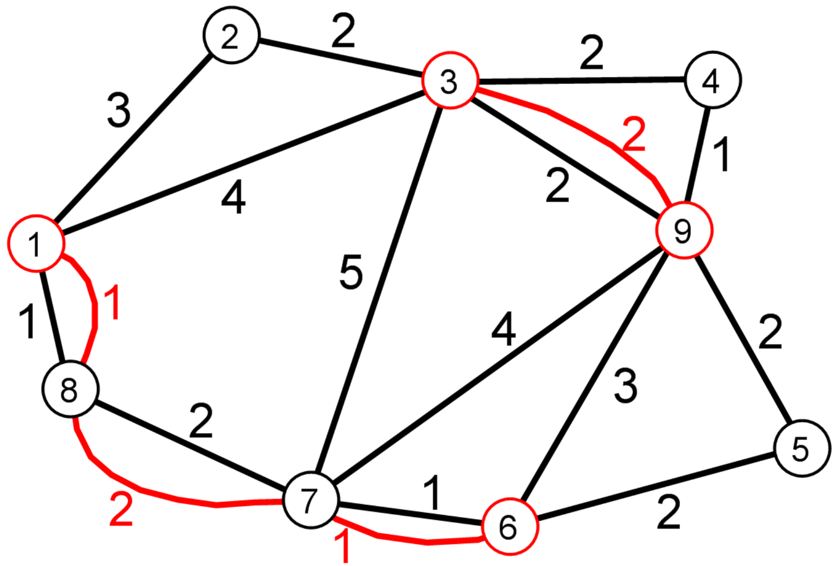
(证明与无向欧拉图类似。)

中国邮递员问题（管梅谷，1962）

- 问题：邮递员从邮局出发，走过辖区内每条街道*至少一次*，再回邮局，如何选择最短路线?
- 数学模型
  - 无向带权图G: E_G中元素对应于辖区内的街道，V_G中的元素对应于街道的交叉点，街道长度用相应边的权表示。
  - 问题的解: G中包含所有边的权最小的回路，称为最优回路(注意：未必是简单回路)。
  - 当G是欧拉图，则最优回路即欧拉回路。
  - 若G不是欧拉图，则通过加边来消除G中的奇度顶点，将其转换成欧拉图。

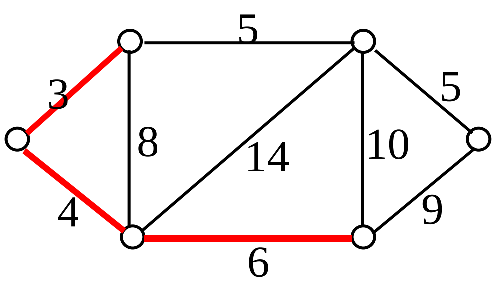
中国邮递员问题

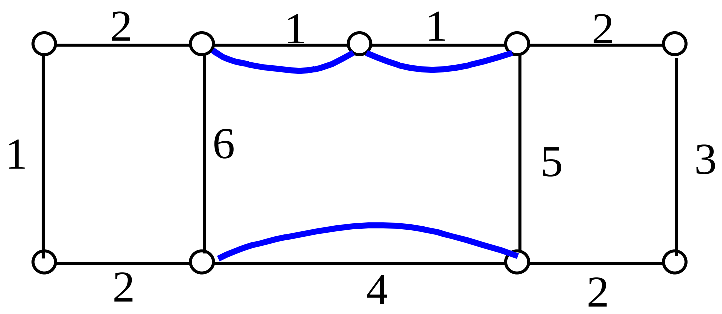
- 通过加边来消除G中的奇度顶点，使得加边得到的欧拉图G*中重复边的权和最小。



中国邮递员问题-算法

- 算法过程
  - 1．用Dijkstra算法求所有奇度顶点对之间的最短路径。(若G是欧拉图，直接用Fleury算法)
  - 2．以G中所有奇度顶点构造带权完全图G_{2k}，每边的权是两顶点间最短路径长度。
  - 3．求G_{2k}中的最小权完美匹配M。
  - 4．按照M中的各个路径添加重复边。再用Fleury算法求欧拉回路。



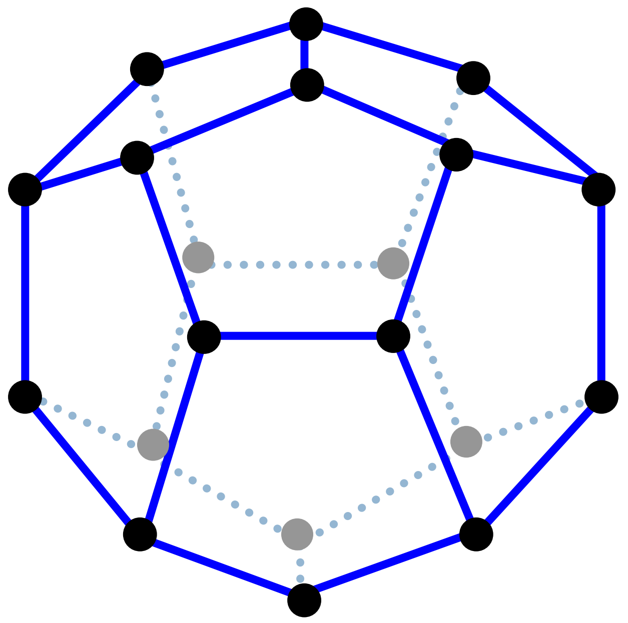


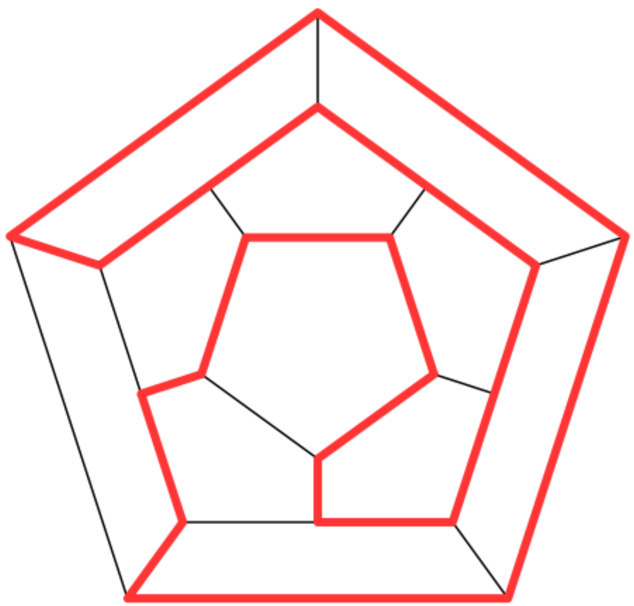
本节提要

- 内容1：欧拉图
  - 什么是欧拉图：含有欧拉回路
  - 欧拉图的充要条件：所有顶点度数为偶数
  - 如何构造欧拉回路：Fleury算法
- 内容2：哈密尔顿图
  - 什么是汉密尔顿图?
  - 哈密尔顿图的必要和充分条件?
  - 哈密尔顿图有哪些应用?

周游世界的游戏

- 沿着正十二面体的棱寻找一条旅行路线，通过每个顶点恰好一次又回到出发点. **(Hamilton 1857)**





Hamilton通路/回路

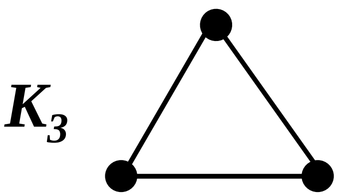
- G中Hamilton通路
  - 包含G中所有顶点
  - 通路上各顶点不重复
- G中Hamilton回路
  - 包含G中所有顶点
  - 除了起点与终点相同之外，通路上各顶点不重复。
- Hamilton回路与 Hamilton通路
  - Hamilton通路问题可转化为Hamilton回路问题

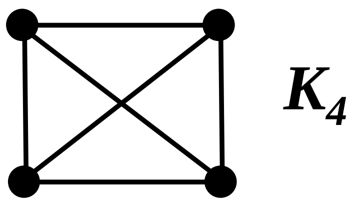
Hamilton回路的基本特性

- **Hamilton**回路:无重复地遍历图中诸点,

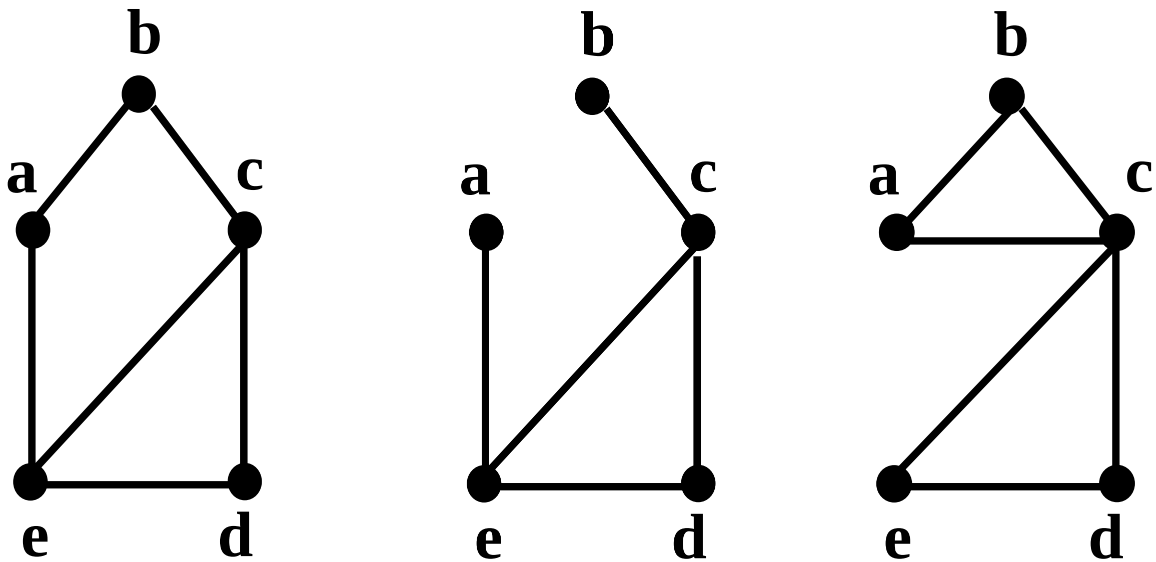
  Euler回路:无重复地遍历图中诸边.
- 若图G中有一顶点的度为1, 则无**Hamilton**回路.
- 设图G中有一顶点的度大于2, 若有**Hamilton**回路, 则只用其中的两条边.
- 若图中有n个顶点, 则**Hamilton**回路恰有n条边.
- 注: **Hamilton**回路问题主要针对简单图。

Hamilton回路的存在性问题





$K_n(n \geq 3)$有Hamilton回路



哈密尔顿图的必要条件

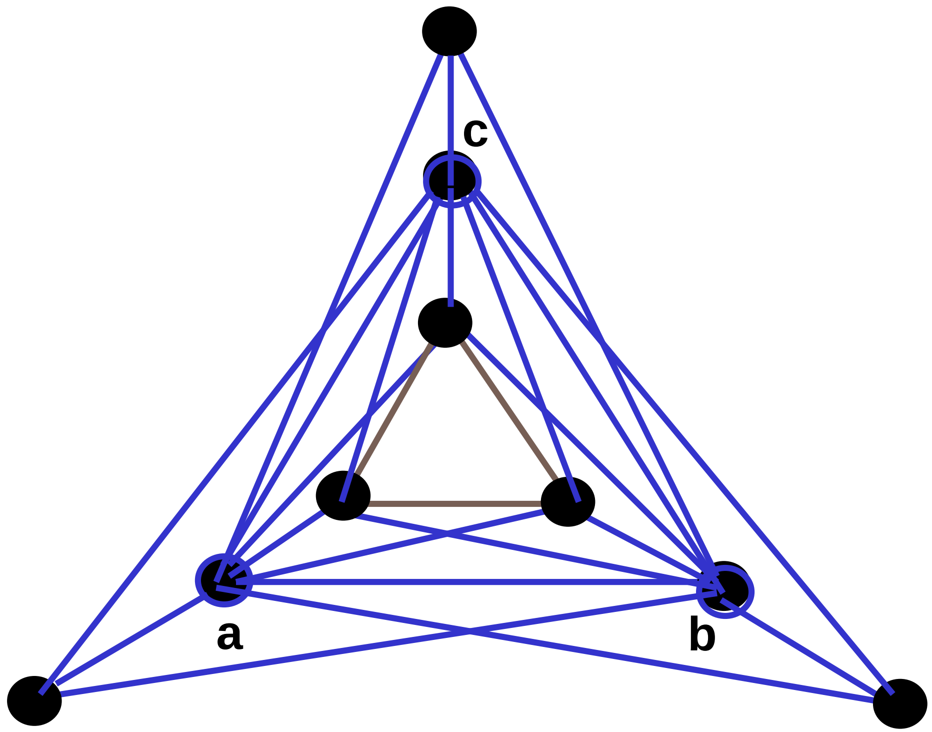
- 如果图G=(V, E)是Hamilton图，则对V的任一非空子集S，都有

$$P(G-S) \le |S|$$

其中，P(G-S)表示图G-S的连通分支数.

理由：设C是G中的Hamilton回路, $P(G-S) \le P(C-S) \le |S|$

例

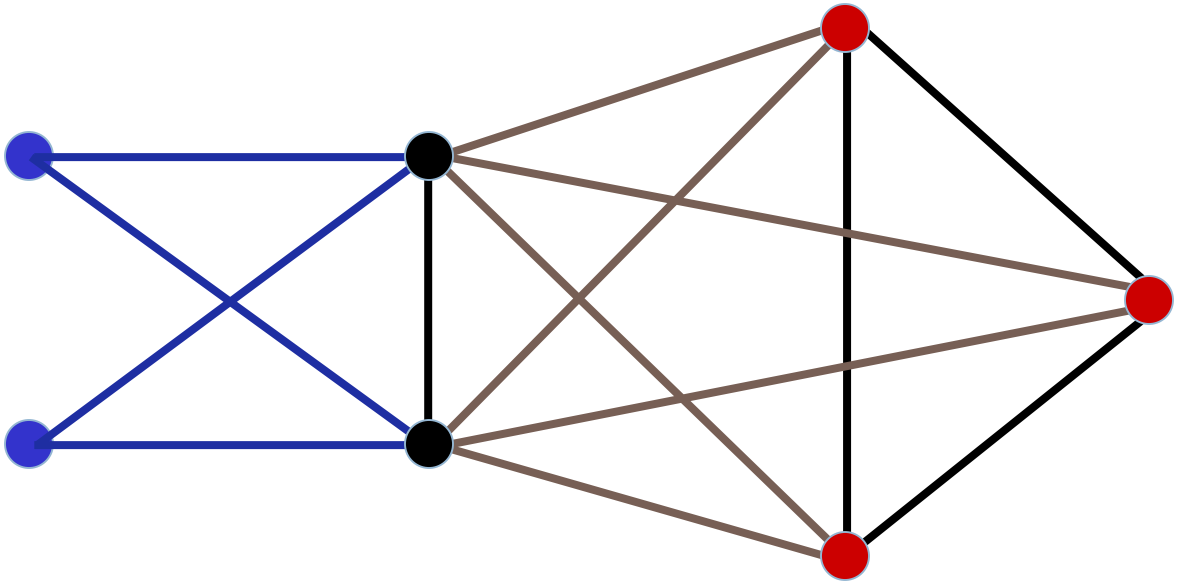


将图中点a, b, c的集合记为S, G-S有4个连通分支,而|S|=3. G不是Hamilton图.

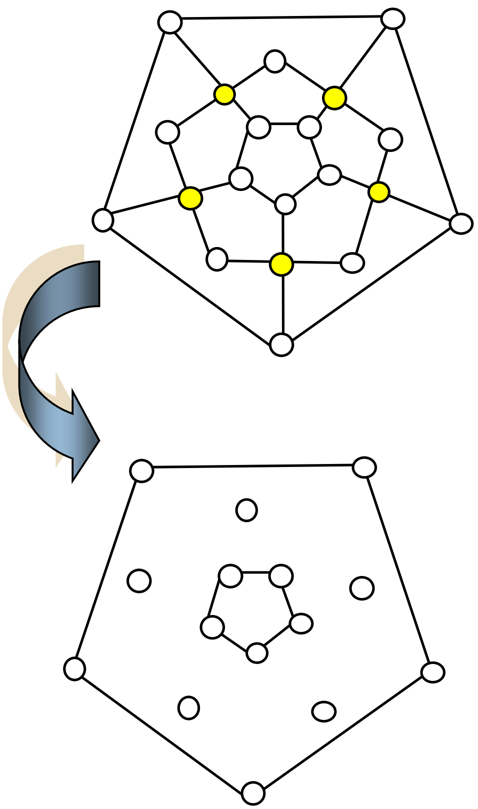
例

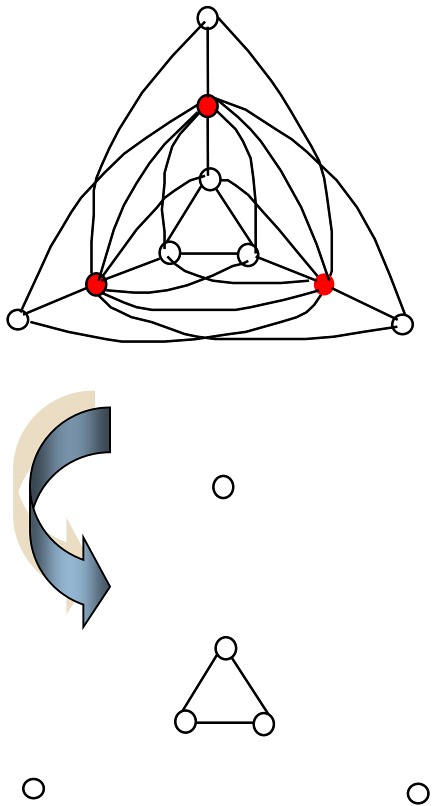
$$\overline{K_h} \longleftrightarrow K_h \longleftrightarrow K_{n-2h}$$

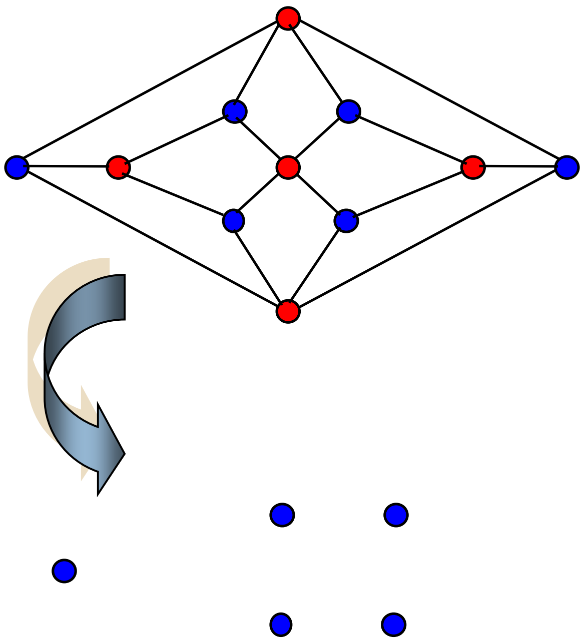
下图给出的是 $C_{2,7}$ 的具体图 (h=2,n=7)



例

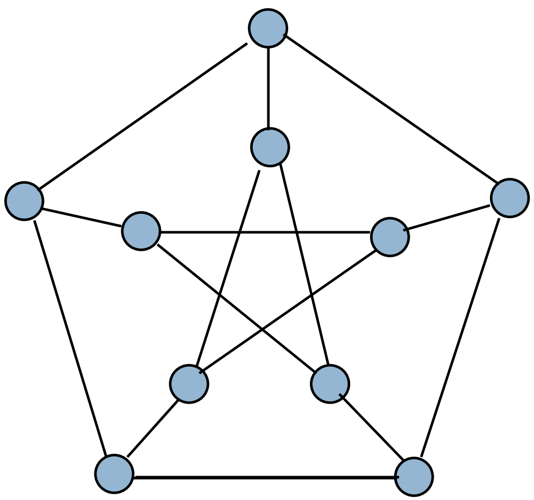






必要条件的局限性

- 必要条件只能判定一个图不是哈密尔顿图
  - **Petersen**图满足上述必要条件，但不是哈密尔顿图。



哈密尔顿图的充分条件

- **Dirac定理（狄拉克, 1952）**

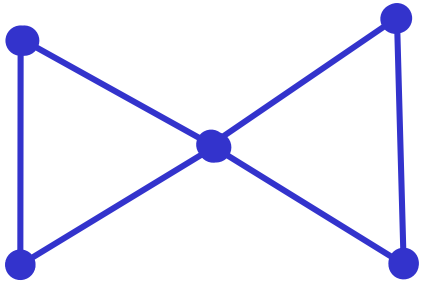
  设G是无向简单图，|G|=n≥3， 若δ(G)≥ n/2，则G有哈密尔顿回路.

- **Ore定理（奥尔, 1960）**

  设G是无向简单图，|G|=n≥3 ，若G中任意不相邻的顶点对u,v均满足： $d(u)+d(v)\geq n$，则G有哈密尔顿回路。

充分条件的讨论

- "δ(G)≥ n/2"不能减弱为： δ(G)≥ $\lfloor n/2 \rfloor$
- 举例，n=5，δ(G)=2 . G不是Hamilton图.



- 存在哈密尔顿通路的充分条件（Ore定理的推论）

设G是无向简单图，|G|=n≥2 ，若G中任意不相邻的顶点对u,v均满足：*d*(u)+*d*(v)≥n-1，则G有哈密尔顿通路。

Ore定理的证明

- **Ore定理（1960）**

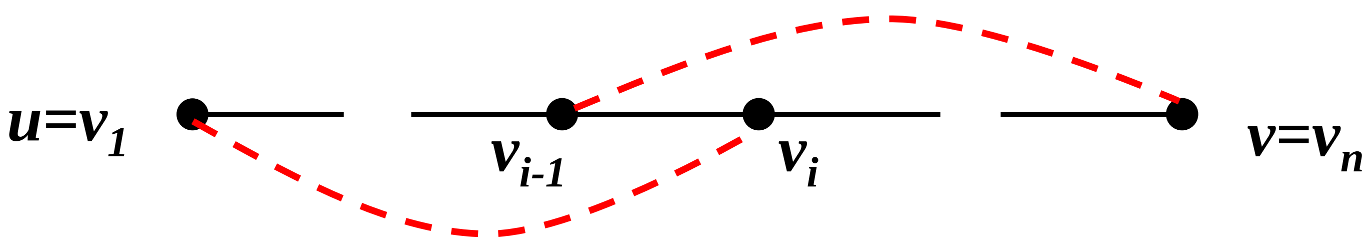
  设G是无向简单图，$|G|=n\geq 3$，若G中任意不相邻的顶点对u,v均满足：$d(u)+d(v)\geq n$，则G有哈密尔顿回路。

- 证明：反证法，设存在满足（*）的图G，但是G没有Hamilton回路.

  不妨假设G是边极大的非Hamilton图，且满足（*）。若G不是边极大的非Hamilton图，则可以不断地向G增加若干条边，把G变成边极大的非Hamilton图G'，G'依然满足（*），因为对$\forall v\in V(G)$，$d_G(v)\leq d_{G'}(v)$。

Ore定理的证明

设**u, v**是**G**中不相邻的两点，于是**G+uv**是**Hamilton**图. 因此，**G**中有起点为**u**，终点为**v**的**Hamilton**通路:



不存在两个相邻的顶点 v_{i-1}和v_i,使得v_{i-1}与v相邻且v_i 与u相邻. 若不然, $(v_1, v_2, \ldots v_{i-1}, v_n, \ldots, v_i, v_1)$是G的**Hamilton**回路. 设在G中$u$与$v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{ik}$相邻, 则$v$与$v_{i1-1}, v_{i2-1}, \ldots v_{ik-1}$都不相邻, 因此

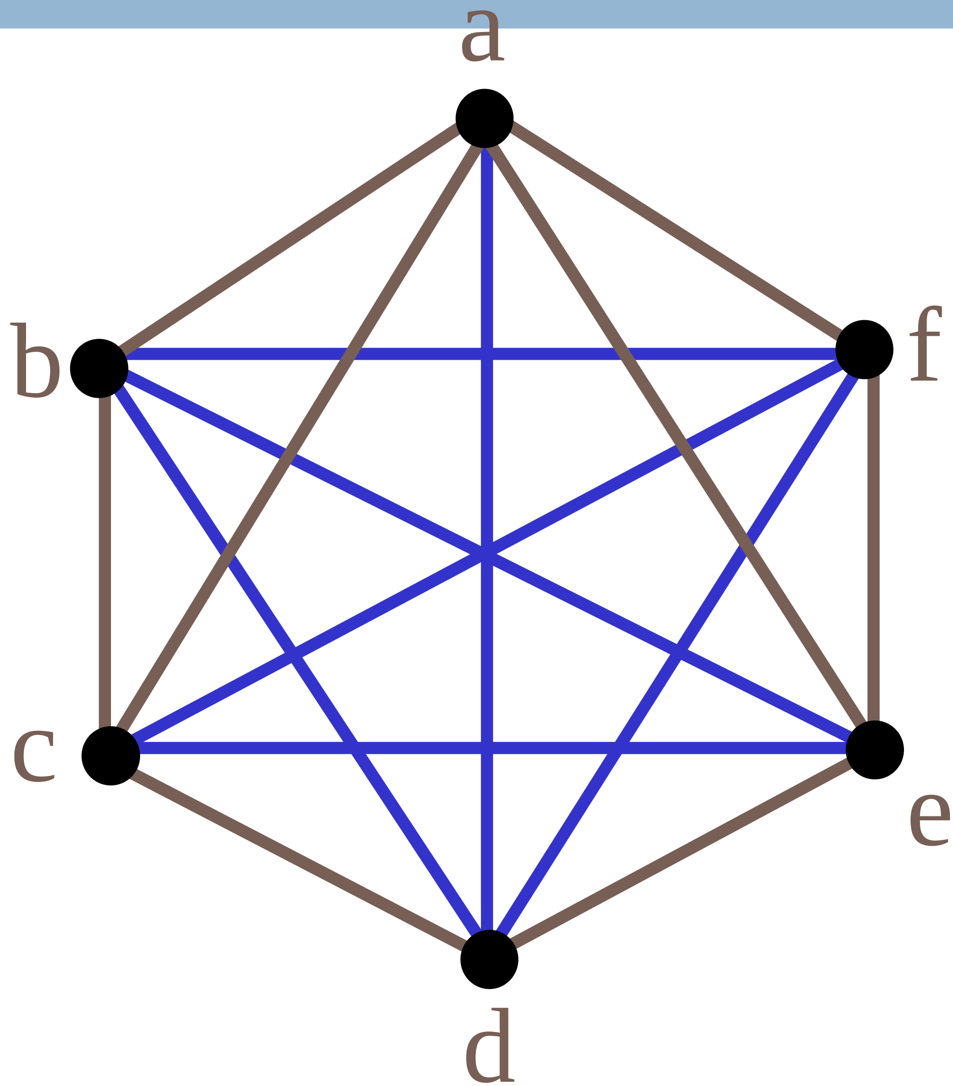
$d(u)+d(v) \le k+n-1-k < n$. 矛盾.

Ore定理的延伸

- 引理. 设G是有限图，u, v是G中不相邻的两个顶点，并且满足：$d(u)+d(v) \geq |G|$，则
  G是Hamilton图 $\Leftrightarrow$ $G \cup \{uv\}$是Hamilton图.
- 证明：类似于Ore定理的证明.

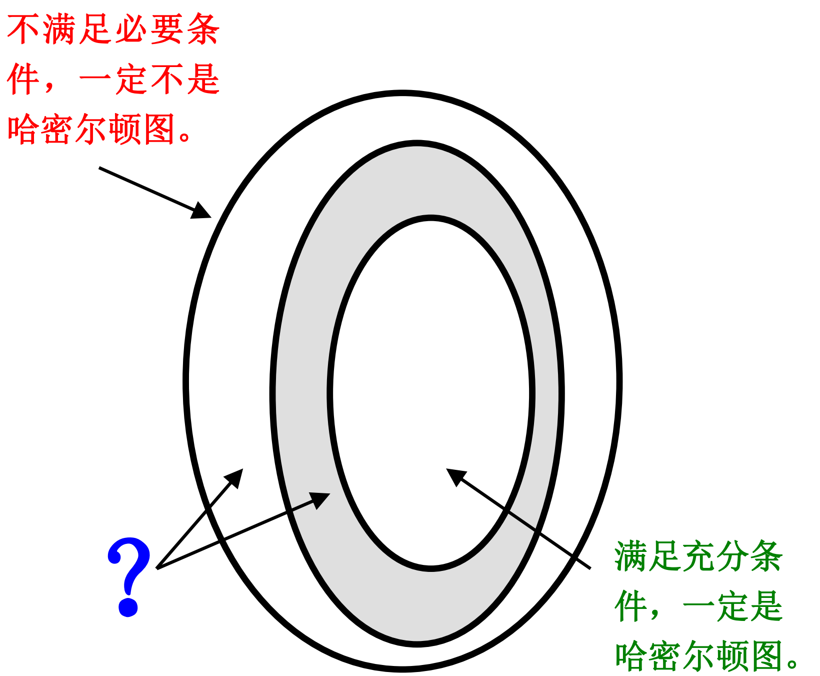
- G的闭合图, 记为C(G): 连接G中不相邻的并且其度之和不小于 |G| 的点对, 直到没有这样的点对为止.
- 有限图G是Hamilton图充分必要其闭合图C(G)是Hamilton图.

闭合图(举例)



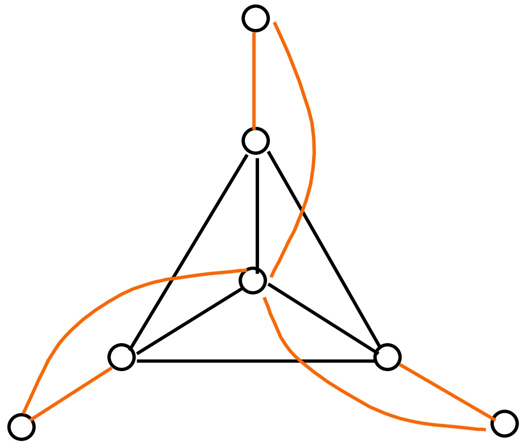
判定定理的盲区

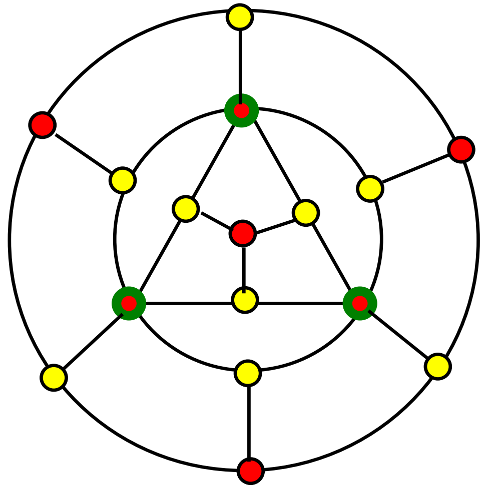
- 从“常识”出发个案处理
  - 每点关联的边中恰有两条边在哈密尔顿回路中。
  - 利用对称性
  - 利用二部图特性
  - …

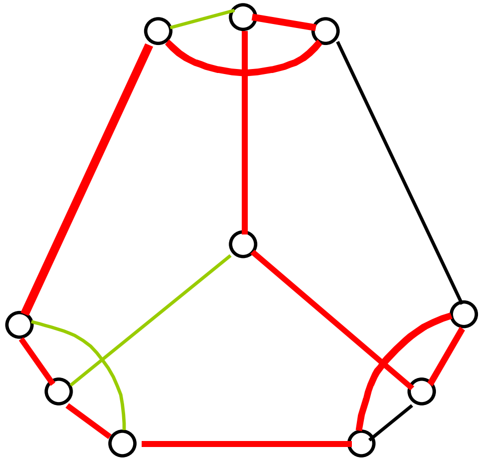


判定哈密尔顿图的例子

- 下列图中只有右图是哈密尔顿图。

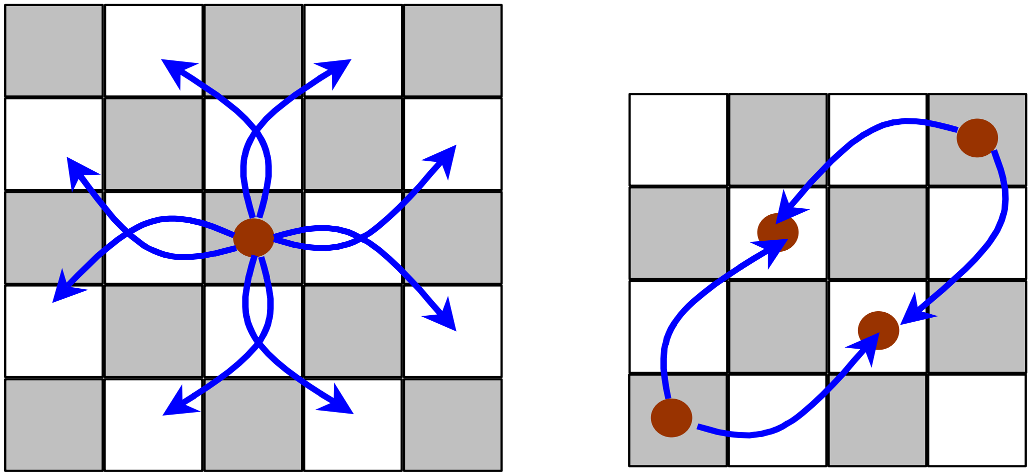




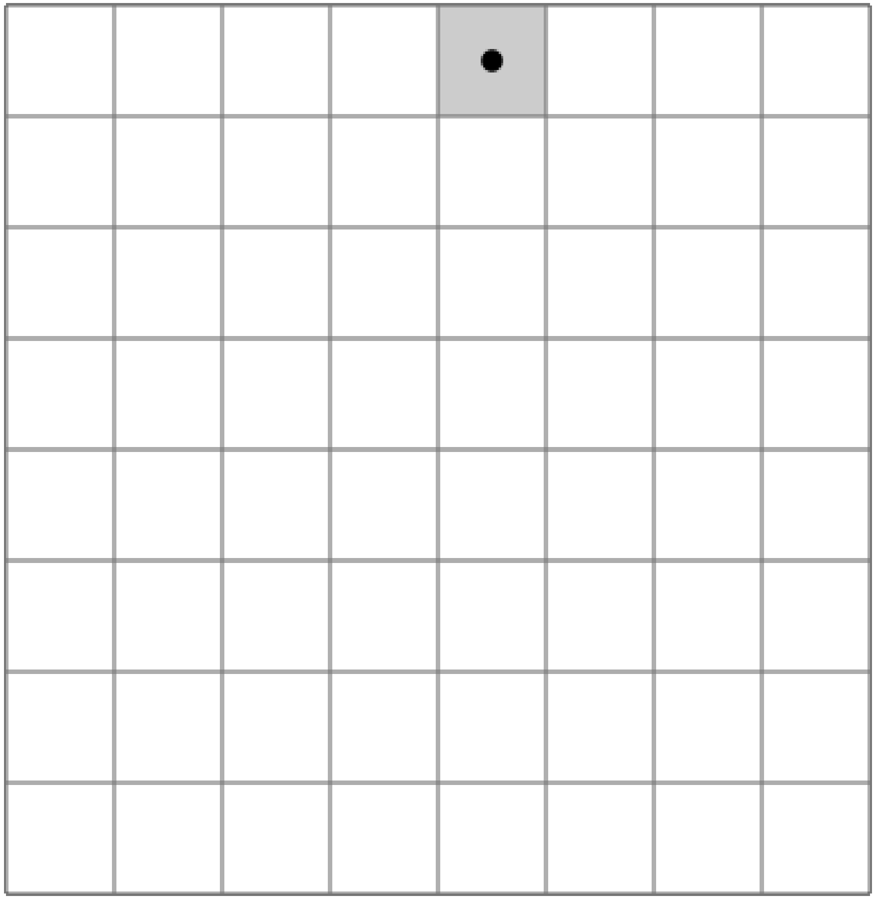


棋盘上的哈密尔顿回路问题

- 在4×4或5×5的缩小了的国际象棋棋盘上，马(Knight)不可能从某一格开始，跳过每个格子一次，并返回起点。



Knight's tour



From wikipedia

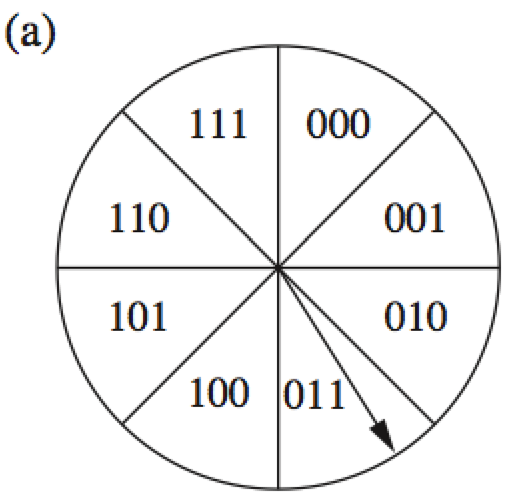
哈密尔顿图问题

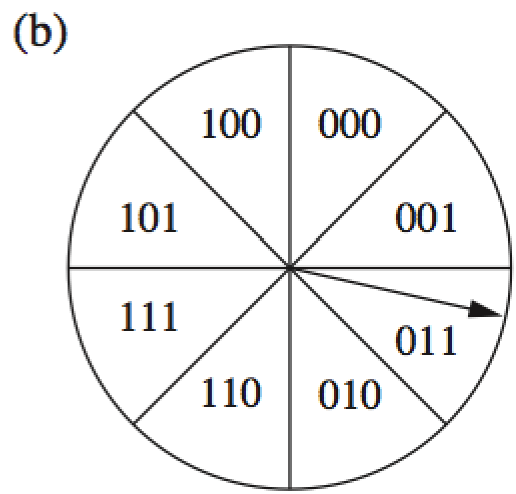
- 基本问题
  - 判定哈密尔顿回路的存在性
  - 找出哈密尔顿回路/通路
- （在最坏情况下）时间复杂性为多项式的算法?
  - **NP-complete**

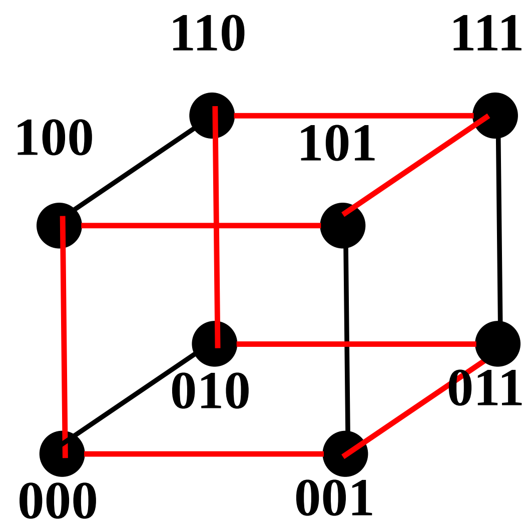
  - Euler路同Hamilton路相比较，前者要周游诸弧，后者要周游诸点，虽然仅有一字之差，但两者的困难程度却不大相同。
  - 对于前者，在上节我们已经得到了一些定理，比较满意地解决了这个问题；但对于后者，却没有令人满意的结果。寻找一个图是Hamilton图的充分必要条件，仍是图论中一个重要问题。

应用（格雷码）

- 给定一个立方体图，求出哈密尔顿回路





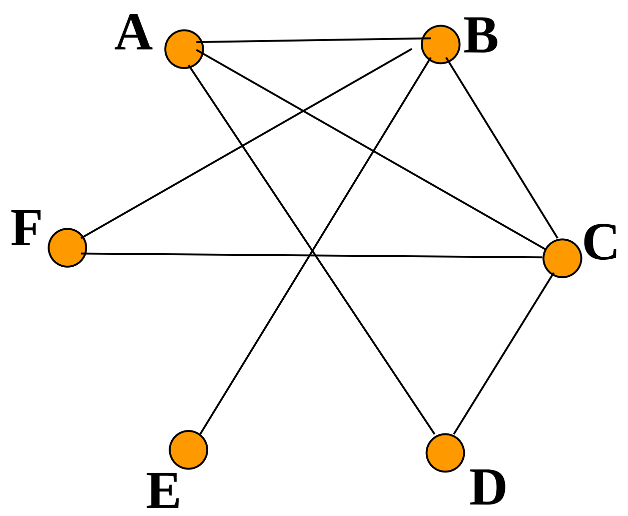


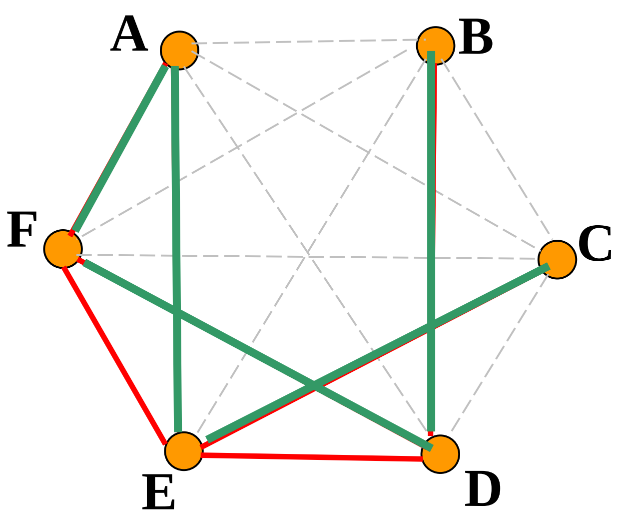
指针误差一点点可导致**3**位都错了

Q_3

安排考试日程

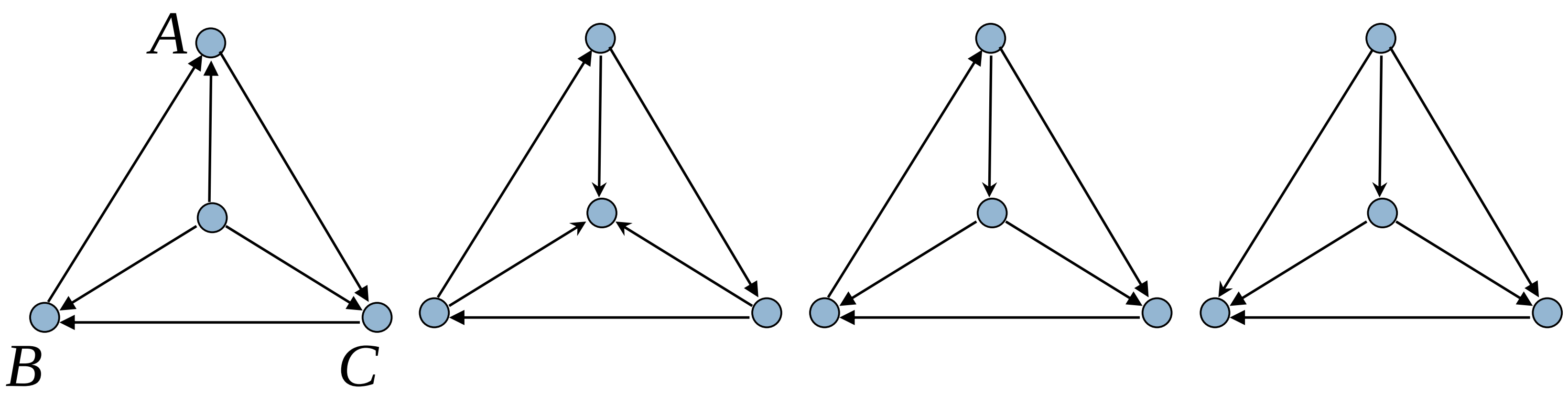
- 问题: 在6天里安排6门课 – A,B,C,D,E,F -的考试，每天考1门。假设每人选修课的情况有如下的4类：DCA，BCF，EB，AB。如何安排日程，使得没有人必须连续两天有考试?





竞赛图

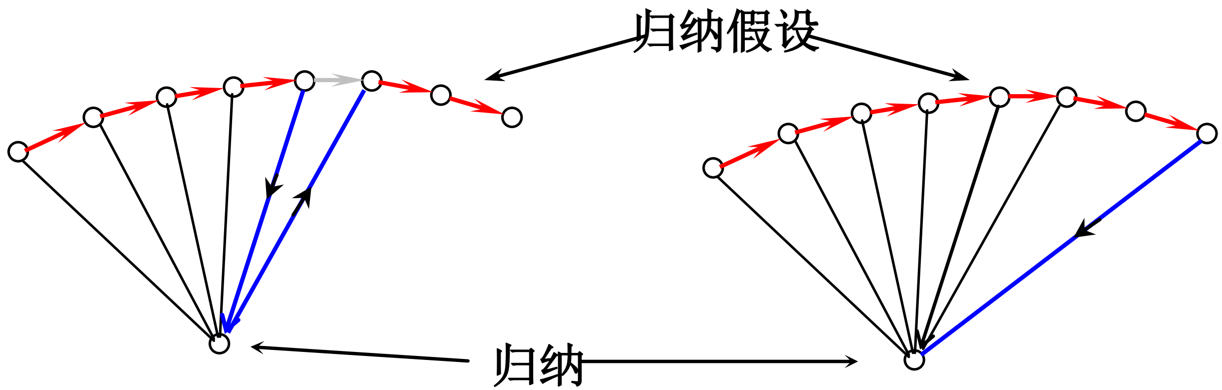
底图为K_4的竞赛图：



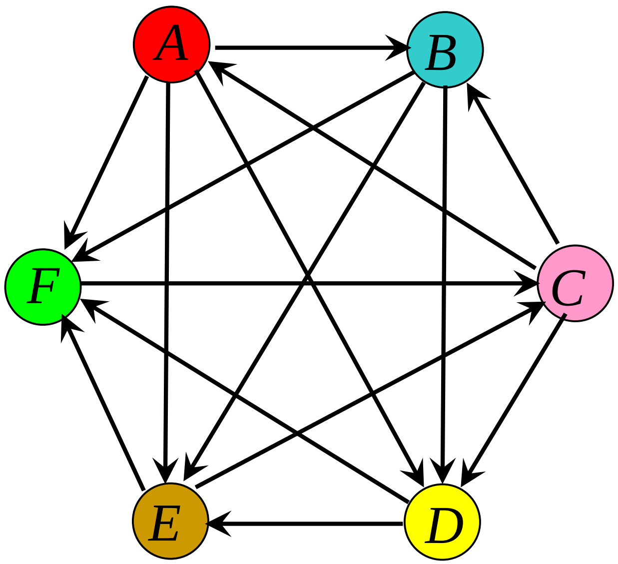
以上每个图可以看作4个选手参加的循环赛的一种结果

竞赛图与有向哈密尔顿通路

- 底图是完全图的有向图称为竞赛图。
- 利用归纳法可以证明竞赛图含有向哈密尔顿通路。



循环赛该如何排名次



按照在一条有向Hamilton通路(一定存在)上的顺序排名：

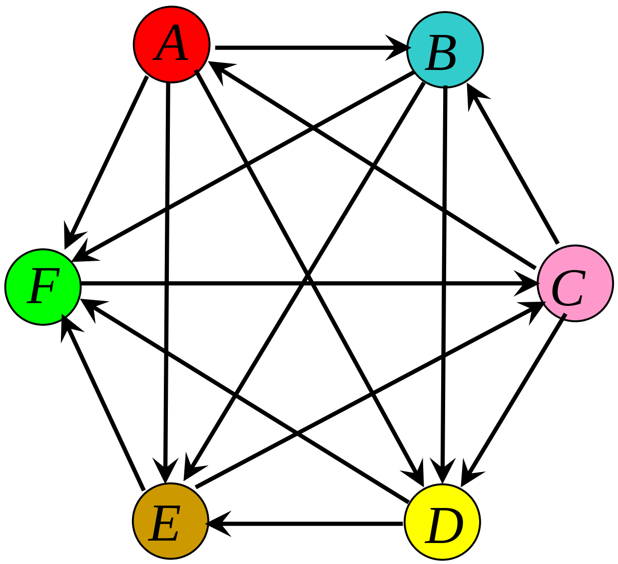
C A B D E F

问题：**Hamilton**通路不是唯一的，例如：也可以得到另一排名

A B D E F C

C 从第一名变成了最后一名

循环赛该如何排名次

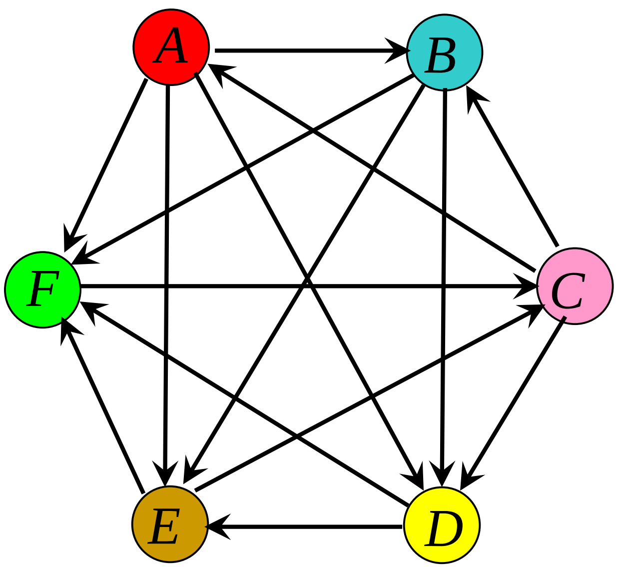


按照得胜的竞赛场次(得分)排名：

A(胜4) ***B*,*C***(胜3) ***D*, *E***(胜2) ***F***(胜1)

问题：很难说***B*,*C***并列第二名是否公平，毕竟***C***战胜的对手比***B***战胜的对手的总得分更高(9比5)。

循环赛该如何排名次



建立对应与每个对手得分的向量

$$s_1 = (a_1, b_2, c_3, d_4, e_5, f_6)$$

然后逐次求第k级的得分向量s_k，每个选手的第k级得分是其战胜的对手在第k-1级得分的总和。

对应于左图所示的竞赛结果，得分向量：

s_1=(4,3,3,2,2,1)　s_2=(8,5,9,3,4,3)

s_3=(15,10,16,7,12,9) s_4=(38,28,32,21,25,16)

s_5=(90,62,87,41,48,32)　……

当问题竞赛图是强连通且至少有4个选手时，这个序列一定收敛于一个固定的排列，这可以作为排名：A C B E D F。

本节小结

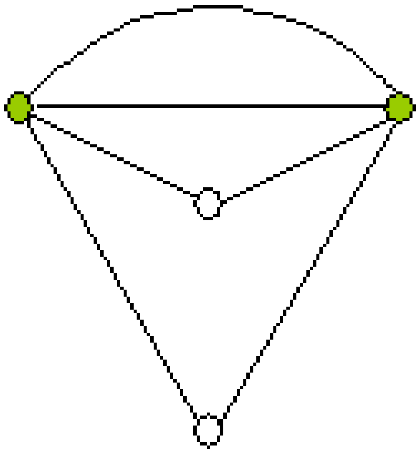
- 内容1：欧拉图
  - 什么是欧拉图：含有欧拉回路
  - 欧拉图的充要条件：所有顶点度数为偶数
  - 如何构造欧拉回路：Fleury算法
- 内容2：哈密尔顿图
  - 什么是汉密尔顿图：含有汉密尔顿回路
  - 哈密尔顿图的必要和充分条件：
    - 必要条件：$P(G-S) \leq |S|$，只能用来判断一个图不是汉密尔顿图
    - 充分条件：Ore定理，只能用来判断一个图是汉密尔顿图
  - 哈密尔顿图有哪些应用

作业

- 见课程网站

随机欧拉图

- 设G是欧拉图，$v \in V_G$，从v开始，每一步从当前点所关联边中随机选边，均可构造欧拉回路，则G称为以v为始点的随机欧拉图。
- 注意，若G是以v为始点的随机欧拉图，则任何一个以v为始点的不包含G中所有边的回路都应该能扩充成欧拉回路。反之，若G不是以v为始点的随机欧拉图，则一定存在已经包含了v所关联的所有边，却未包含G中所有边的简单回路。



随机欧拉图的判定

- 欧拉图G是以v为始点的随机欧拉图*当且仅当*G中任一回路均包含v。

  ⇒ 若G是以v为始点的随机欧拉图，*假设有回路C不包含v.* 令G'=G-C, (G'可能不连通)，G'中包含v的那个连通分支一定是欧拉图，相应的欧拉回路包含了v关联的所有边，但不包含G中的所有边，与G是以v为始点的随机欧拉图矛盾。

  ⇐ 若欧拉图G中任意回路均包含v。假设G不是以v为始点的随机欧拉图，则一定存在已经包含了v所关联的所有边、却未包含G中所有边的简单回路C，假设e是不在C中的一条边，e的端点必异于v，设一个是u。令从G中删除C中所有边的图为G'，显然在G'中v是孤立点。而包含u的连通分支是欧拉图，因此u必包含在一回路中，但此回路不含v，矛盾。

  (易推知：欧拉图G是以任一顶点为始点的随机欧拉图 当且仅当G本身是一个初级回路)