二部图与匹配

上节回顾

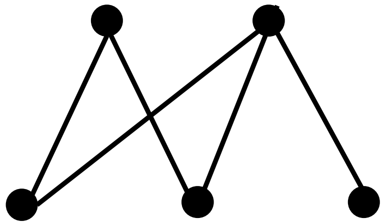
- 内容1：**Dijkstra算法**
- 内容2：**Floyd-Warshall算法**
- 内容3：旅行商问题（**TSP**）
- 内容4：最大流问题*

本节提要

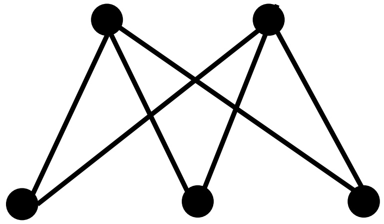
- 问题1：什么是二部图及其匹配?
- 问题2：二部图中的有哪些匹配?

二部图(bipartite graph，偶图)

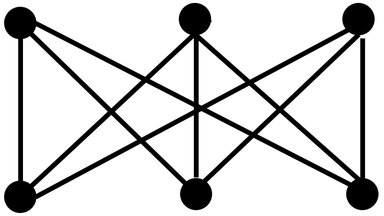
- 二部图：顶点集划分为2个类别(不相交)，边的端点在不同类别中。
- 完全二部图：来自不同类别的两个顶点均有边。



G



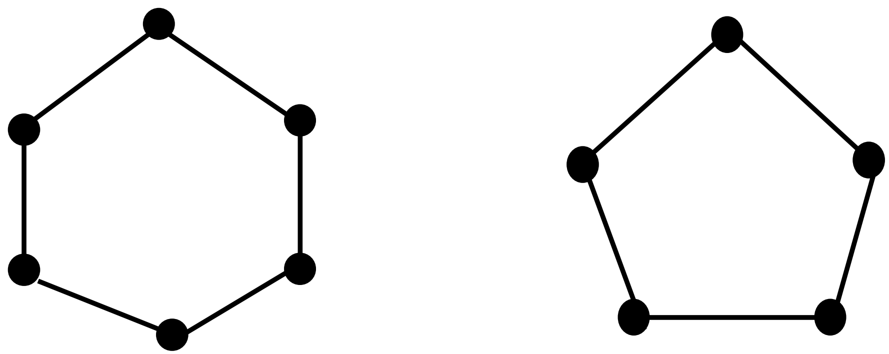
$K_{2,3}$



$K_{3,3}$

二部图的判定

- 下图是否是二部图?



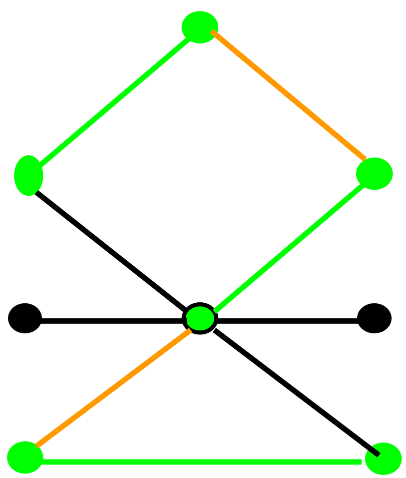
- 二种颜色对顶点着色，相邻顶点赋以不同颜色

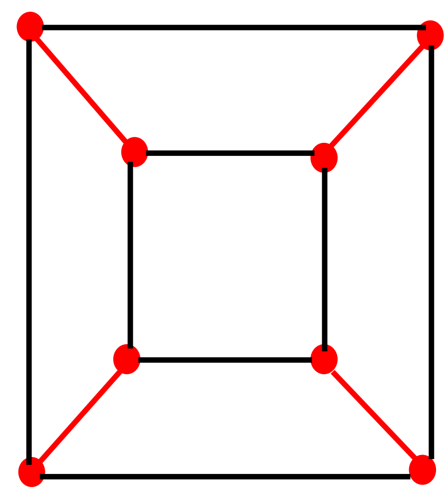
图中的匹配

- 匹配（边独立集）：互不相邻的边的集合
- M-饱和点：匹配M中各边的端点

匹配数

β_1=3





匹配数

β_1=4

极大匹配

完美匹配

最大匹配

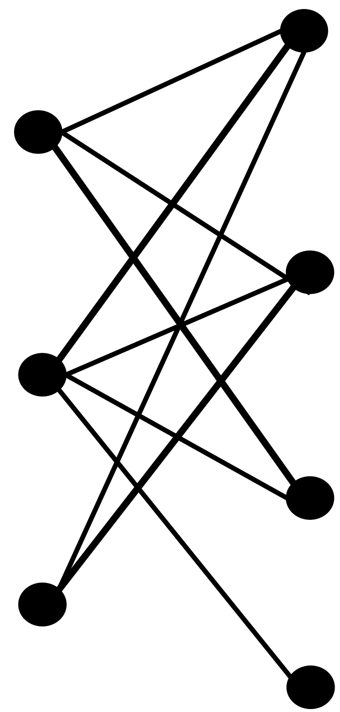
M-饱和点

M-饱和点

二部图的匹配

- 孤岛上的婚姻：成就最多幸福婚姻的配对方案

互不相邻的边集



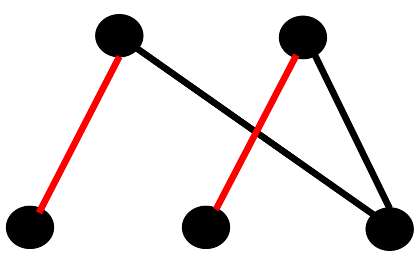
本节提要

- 问题1：什么是二部图及其匹配?
  - 两个无内部边的顶点集；互不相邻的边的集合
- 问题2：二部图中的有哪些匹配?

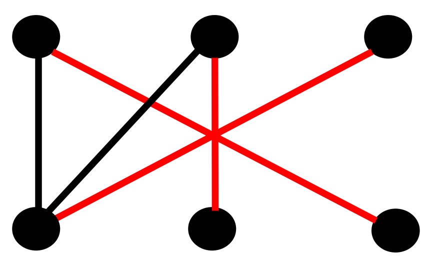
二部图中的完备匹配

- 定义：设G是二部图，二部划分为$<V_1,V_2>$，若G中的匹配M饱和V_1中所有顶点，则称M为V_1到V_2的完备匹配。

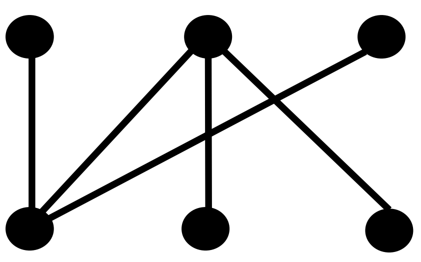
注意：完备匹配一定是最大匹配，但仅当$|V_1|=|V_2|$才是完美匹配。



V_1到V_2的完备匹配



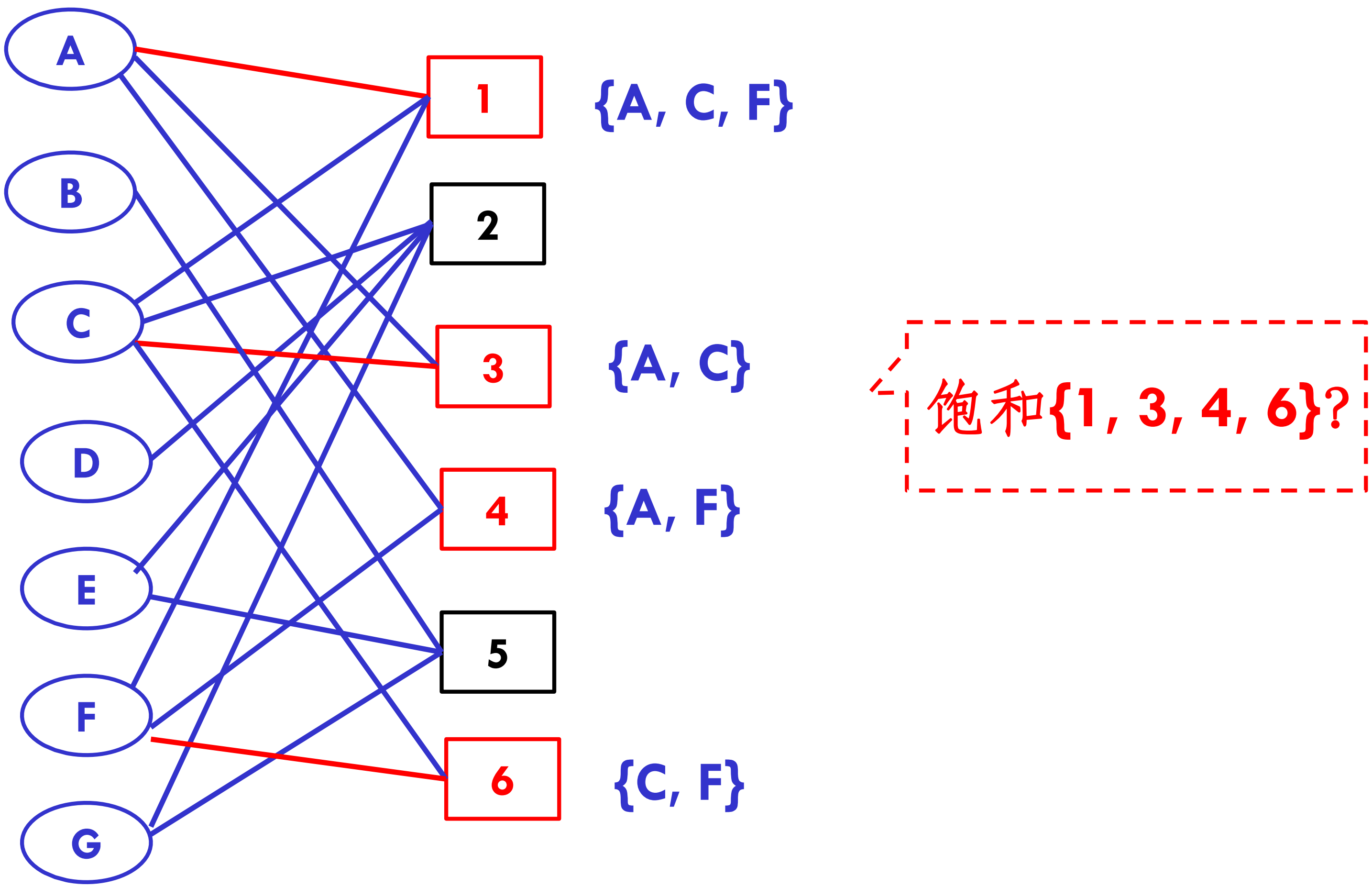
存在完美匹配



无完备匹配？

二部图中的完备匹配（举例）

- $V_1=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，是否存在饱和V_1的配对方案？



Hall定理

- Hall定理(1935, Marriage Theorem)

  设二部图$G=<V_1, V_2, E>$, 则G有V_1到V_2的完备匹配 $\Leftrightarrow$

  对于任意的 $A \subseteq V_1$ ，有 $|N(A)| \geq |A|$

- 证明. 必要性易证，下证充分性（使用强归纳法）。

  如果 $|V_1|=1$, 充分性命题显然成立。

  假设当$|V_1| \leq k$ $(k \geq 1)$ 时充分性命题均成立, 要证:当$|V_1|=k+1$时充分性命题也成立。分二种情形来证明。

  (1)对V_1的任意真子集A， $|N(A)| > |A|$

  (2)存在 V_1的一个真子集A'， $|N(A')| = |A'|$

Hall定理

- 归纳证明.

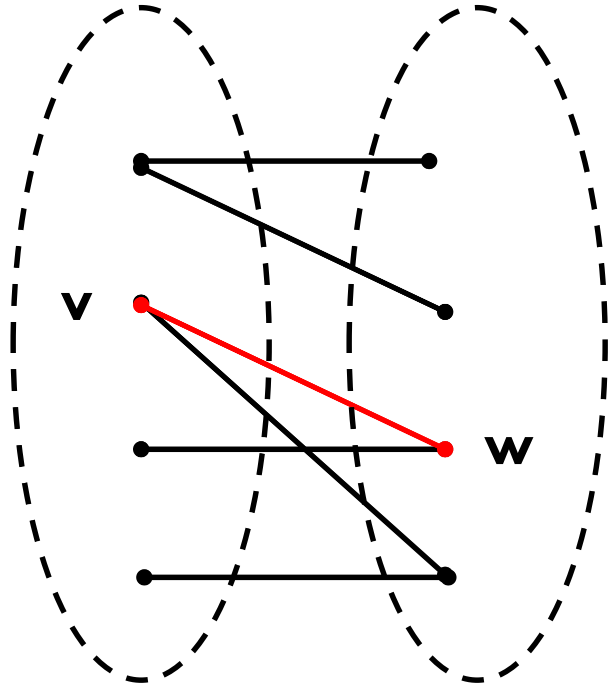
(1)对V_1的任意真子集A, |N(A)| > | A |

任取一个顶点$v \in V_1$, 任取$w \in N(\{v\})$ （一定存在）.

$H=G-\{v, w\}$是一个二部图（非空）.

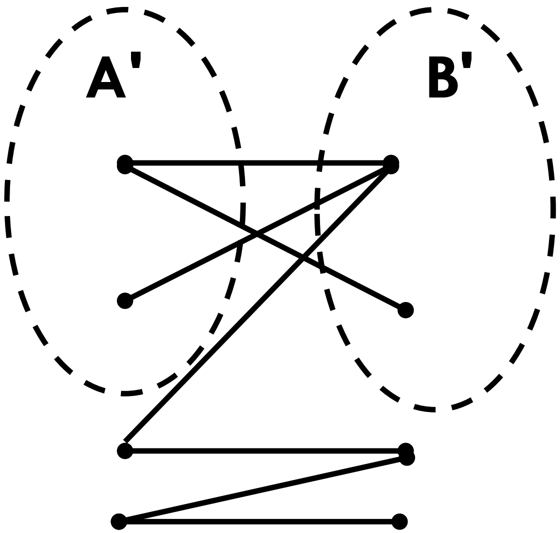
H满足归纳假设的条件 (N(A)最多少了一个w), 从而H有$V_1-\{v\}$到$V_2-\{w\}$的完备匹配.

这个匹配加上边(v, w)构成G的从V_1到V_2的完备匹配.



Hall定理

(2)存在 V_1的一个真子集A', $|N(A')| = |A'|$. 记 $B' = N(A')$.



据归纳假设,存在A'到B' 的完备匹配.

下证二部图H=G-A'-B' 满足归纳假设条件.

反设存在$C \subseteq V_1 - A'$. $|N_H(C)| < |C|$.

$$|N_G(C \cup A')| = |N_H(C)| + |B'| < |C| + |B'| = |C| + |A'| = |C \cup A'|.$$

矛盾.

据归纳假设,存在V_1-A'到V_2-B'的完备匹配.

合并上述两个匹配得到一个V_1到V_2的完备匹配. 得证

Hall定理的推论

- 设二部图G是一个k-正则的($k \geq 1$), 则G有完美匹配.
- 证明. 不妨设$G= <A, B, E>$, $k\ |A|\ = k\ |B|$, 所以$|A| = |B|$.

  下证G有A到B的完备匹配.

  对任一$S \subseteq A$，S与N(S)之间总共有$k|S|$ 条边，而与N(S)相关的边总共有$k|N(S)|$ 条边。

$$\therefore\ k|S| \leq k|N(S)|$$

$$\therefore\ |N(S)| \geq |S|$$

  根据Hall定理，G有A到B的完备匹配，因 $|A| = |B|$，该匹配是完美匹配。

完备匹配的一个充分条件

- 二部图$G=(V_1,V_2, E)$, 若V_1中每个顶点至少关联t条边，而若V_2中每个顶点至多关联t条边，则G中存在V_1到V_2的完备匹配。

- 证明
  - 类似于上述推论， $t|S| \le \cdots \le t\,|N(S)|$ 。

得分	

八、（本题满分 12 分）

定义： 集合族$(A_1, A_2, \cdots, A_m)$的一个相异代表系（system of distinct representatives, SDR）是指集合$A_1, A_2, \cdots, A_m$中包含的对每个正整数$i(1 \leq i \leq m)$都满足$x_i \in A_i$（称元素x_i为集合A_i的代表元素）的互异的代表元素组$(x_1, x_2, \cdots, x_m)$.

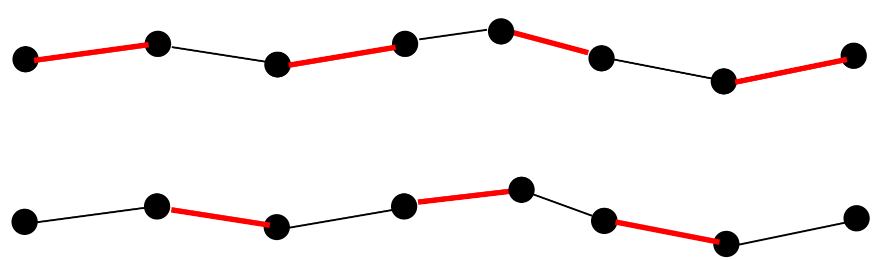
例如，对集合$\{a, b, c, d\}$的一个子集族$\mathcal{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$，其中$A_1 = \{a, b, c\}$，$A_2 = \{b, d\}$，$A_3 = \{a, b, d\}$，$A_4 = \{b, d\}$，可见$\mathcal{A}$存在一个 SDR：$(c, b, a, d)$，但$(a, b, b, d)$则不是$\mathcal{A}$的 SDR，因其不满足代表元素的互异性.

试证明：集合族$(A_1, A_2, \cdots, A_n)$存在 SDR 当且仅当该集合族满足：对所有$k \leq n$，集合族中任意k个集合$A_i(1 \leq i \leq n)$的并集中至少包含k个元素.

注：集合族是指由集合构成的序列，序列中的元素（即集合）可以相同.

交错路径与可增广交错路径

- 定义：设M是G中一个匹配。若G中路径P中M与E_G-M中的边交替出现，则称P为M-交错路径(也可以是回路)；若P的起点与终点都是M-非饱和点（没有被匹配的顶点），则称P是可增广交错路径（增广路径）。



(可增广)交错路径

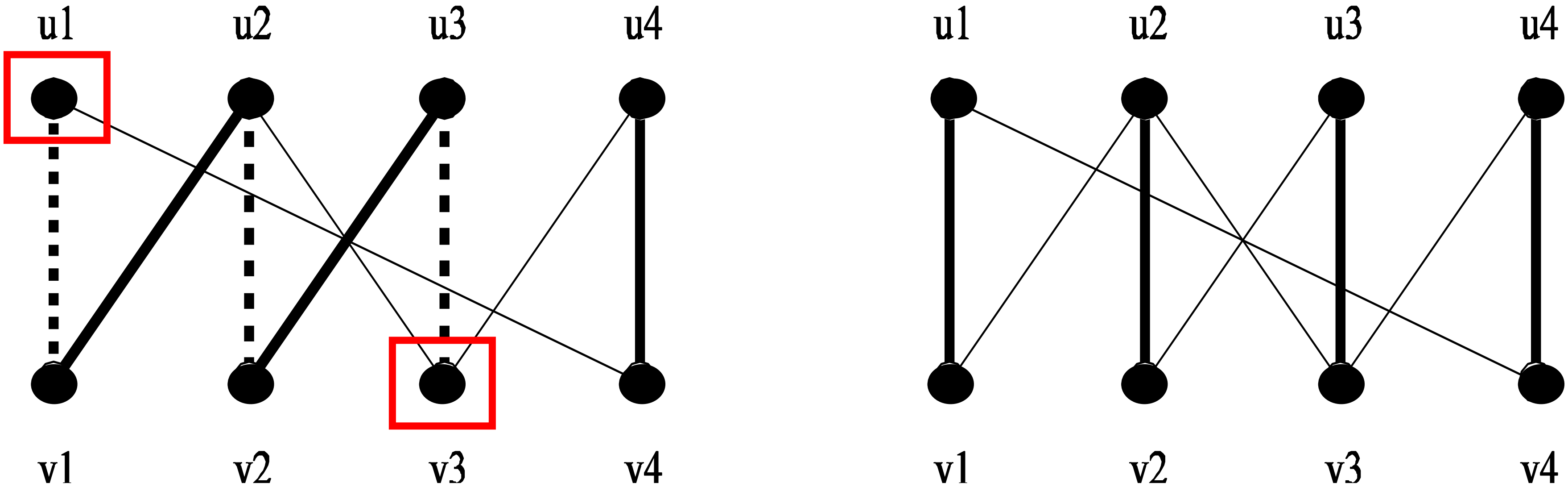
最大匹配与增广路径

- Berge定理. M是最大匹配 $\Leftrightarrow$相对于M没有增广路径
- 证明. 容易证明必要性，下证充分性.

假设有一个更大的匹配M'. 令$G' = (V, M \oplus M')$. G'中各顶点的度最多为2. 因此, G'的各连通分支要么是路径(孤立点也看作路径), 要么是回路（偶长度）.无论是路径还是回路，来自M的边与来自M'的边一定是交错的. 由$|M'| > |M|$, 故必有一条路径包含M'的边多于M的边, 易见此路径是相对于M的增广路径.

增广路径的算法思想

- 在二部图中直接使用增广路径的匹配算法
  - 找增广路径, 对M进行增广，一直至没有增广路径.
  - 复杂度 O(|V| |E|)，最大匹配的元素个数≤|V|/2



稳定匹配

- G的一个偏好集

  一族线性序 $(\leq_v)_{v\in V}$， 其中，$\leq_v$是E(v)上的线性序

- Unstable: If M is a matching and e=(a, b) is an edge not in M such that both a and b prefer e to their current matching edge.
  - 反之，则是一个稳定匹配

- 定理 1.4. (Gale & Shapley 1962)

  对于任意给定一个偏好集，图G有一个稳定的匹配。

稳定匹配的获取

- 给定M，$a\in A$可被$b\in B$接受：
  - $(a, b)\in E\backslash M$，并且
  - 若存在$(a', b)\in M$，则 $(a', b) <_b (a, b)$.
- $a\in A$对M满意：
  - a是一个尚未配对的顶点，或者
  - 存在$(a, b)\in M$，若a可被b'接受，则 $(a, b) >_a (a, b')$

- 稳定匹配获取思路
  - 从一个空的边集开始，构造（更新）匹配M，保持“A中的所有顶点对M满意”这一特性。

稳定匹配 – 算法

- 给定这样的一个M,
  - 对于A中尚未配对的某顶点a，若{ (a, b) | a可被b接受}非空. 按照线性序$\leq_a$找出最大元，记为(a, b_j)，将这条边添加到M中，删除M中以b_j为端点的边（假如有的话）。
  - 对于A中尚未配对的所有顶点a，{ (a, b) | a可被b接受}均为空. （结束）
  - 直观理解：男子向尚未拒绝他的最喜爱的女子求婚；女子接受目前为止最如意的求婚提议，但是，倘若有更如意的求婚者，会改变主意。

例

- Given men x, y, z, w, women a, b, c, d, and preferences listed below, the matching {xa, yb, zd, wc} is a stable matching.

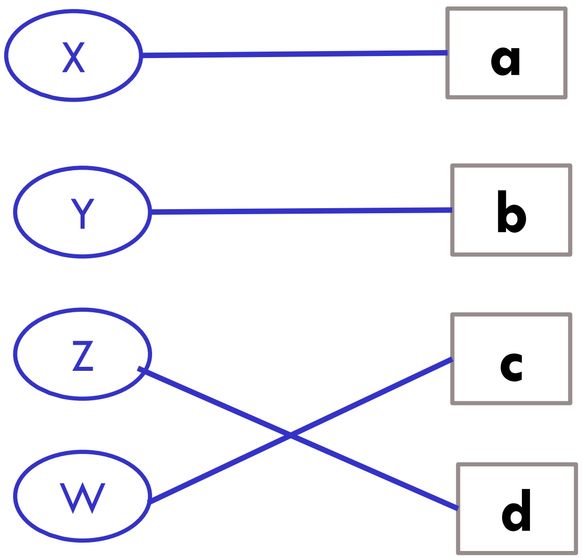
Men{x, y, z, w} Women {a, b, c, d}

x: a > b> c > d a: z > x > y> w

y: a> c > b > d b: y >w > x> z

z: c> d > a > b c: w > x > y > z

w:c > b > a >d d: x > y > z > w

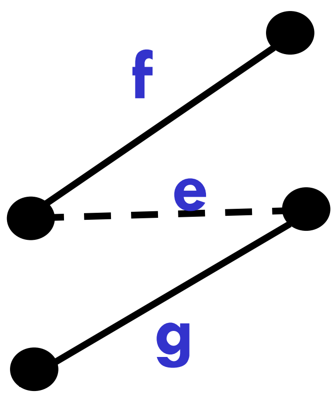


稳定匹配 – 算法正确性分析

- 结束之时
  - A中未配对的顶点均没有可被接受的对象
  - A中的所有顶点对M满意
- 结束之时，M是稳定的

对任意一个$e \in E \setminus M$，存在 $f \in M$满足：

(i) e 和f 有公共端点; (ii) $e <_v f$.



稳定匹配 – 算法正确性分析

- 算法是否会结束?
  - M越来越好，至于不能更好。
  - M 比M'更好: 使得B中顶点更快乐, 也就是说，对于B中任一顶点b，若b是某个边$f' \in M'$的端点，则b必是某个边$f \in M$的端点，且$f' \leqslant_b f$.

工作分配问题

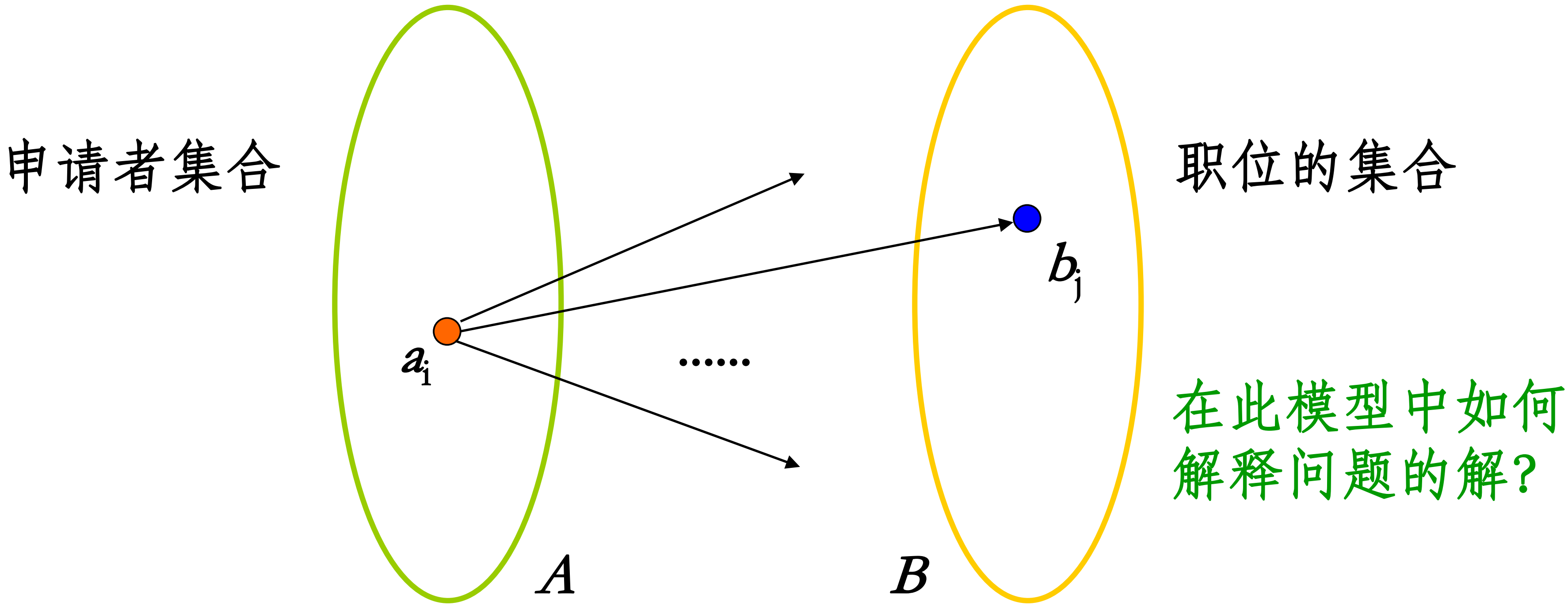
- 问题：n个毕业生有可供选择的m个岗位，每个毕业生给出若干个志愿，是否存在每个人都满意的分配方案。
- 数学模型：建立二部图，V_1中每个点对应一个毕业生，V_2中每个点对应一个可选的岗位，$uv \in E$当且仅当u对应的毕业生愿意选择v对应的岗位。
- 问题的解：问题有解当且仅当G有饱和V_1中所有顶点的完备匹配。

工作分配问题的一般形式

- 工作分配问题
  - 某机构提供n个空缺职位，有m个申请者。每个申请者(不同程度上)满足某些职位的要求。

- 是否可能使每个申请者得到一个他/她适合的职位?
- 若不能，最多多少申请者能够被分配到合适的职位?
- 如何实现一个最佳分配方案?

工作分配问题的求解模型



$a_ib_j \in E_G$ iff. a_i 适合于 b_j

棋盘上的士兵

	×		O
O	×		
×		O	×
	O	×	

要在左图所示的棋盘上放置4个士兵，任何一行或者一列恰好放一个，但不能放在有标记的格子中。

构造一个二部图，a_i表示行，b_i表示列。$a_ib_j \in E$ 当且仅当第i行第j列的方格没有标记。

本节小结

- 问题1：什么是二部图及其匹配?
  - 两个无内部边的顶点集；互不相邻的边的集合
- 问题2：二部图中的有哪些匹配?
  - 完备匹配：一个部饱和，充要条件为Hall定理
  - 最大匹配：充要条件为无增广路径（Berge定理）
  - 稳定匹配：每个节点有线性序，稳定匹配算法

作业

- 见课程网站

得分	

七、（本题满分 10 分）

今有二人，于一图G上玩下列游戏：二人交替选择该图的顶点，要求除了第一步选择，每一步选择的顶点都与对手刚刚选择的顶点相邻．最后还能做出合法选择的玩家获胜.

试证明：当且仅当G中没有完美匹配时，先走的选手有必胜策略.

得分	

九、（本题满分 10 分）

(1) 正整数m,n满足什么条件时，完全二部图$K_{m,n}$是欧拉图？证明你的结论。

(2) 正整数m,n满足什么条件时，完全二部图$K_{m,n}$是哈密尔顿图？证明你的结论。