树的基本概念

回顾

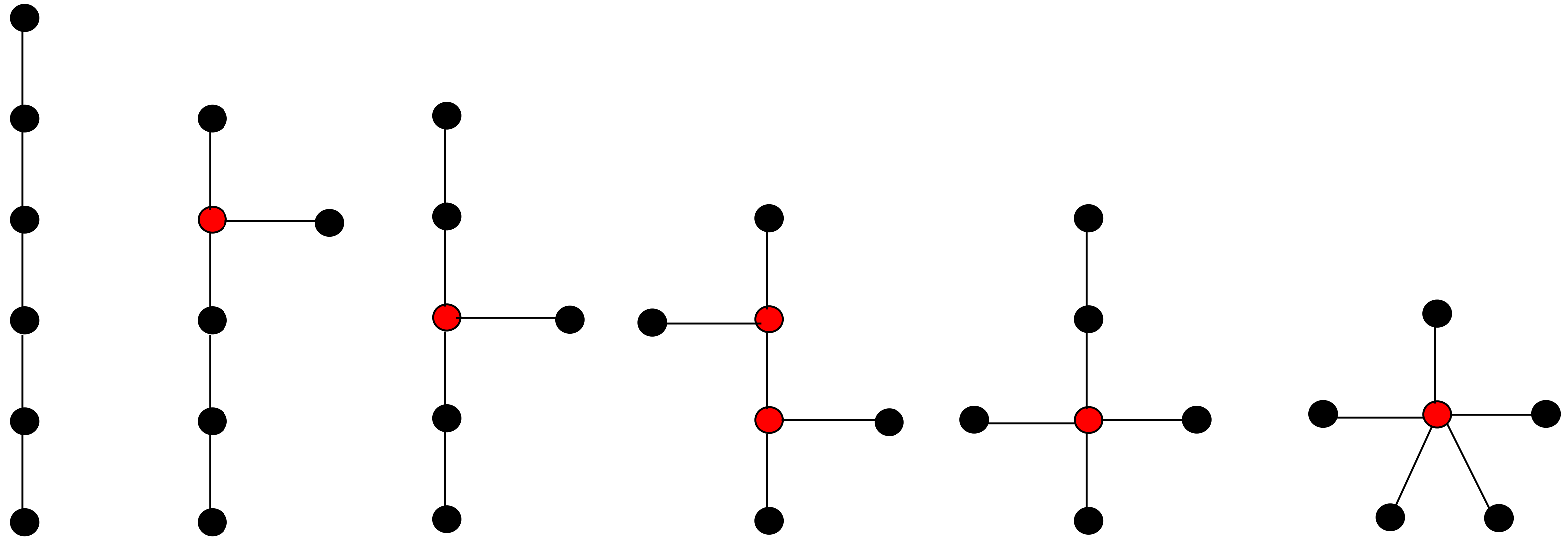
- 问题1：什么是二部图及其匹配?
  - 两个无内部边的顶点集；互不相邻的边的集合
- 问题2：二部图中的有哪些匹配?
  - 完备匹配：一个部饱和，充要条件为Hall定理
  - 最大匹配：充要条件为无增广路径（Berge定理）
  - 稳定匹配：每个节点有线性序，稳定匹配算法

本节提要

- 内容1：树的定义及其性质
- 内容2：根树以及有序根树的遍历

树的定义

- 定义：不包含简单回路的连通无向图称为树。
  - 森林（连通分支为树）
  - 树叶/分支点

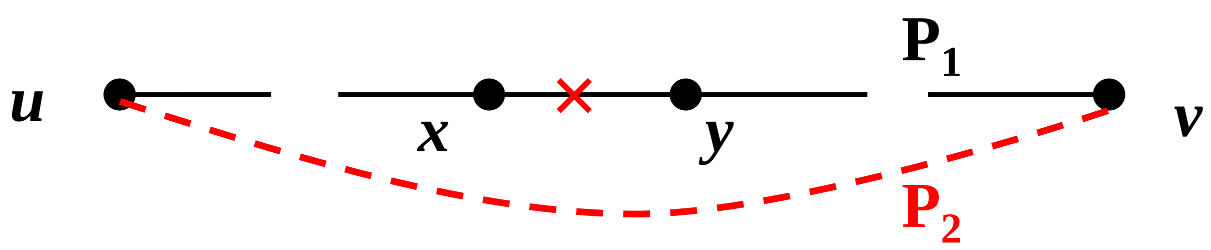


互不同构的6个顶点的树

树中的通路

- 设T是树，则$\forall u,v\in V_T$, T中存在**唯一的 uv-简单通路**。
  - 证明：T是连通图，$\therefore \forall u,v\in V_T$, T中存在uv-简单通路。

    假设T中有两条不同的uv-简单通路P_1,P_2。不失一般性，存在$e=(x,y)$满足：$e\in P_1$但$e\notin P_2$，且在路径P_1上x比y靠近u。令$T^*=T-\{e\}$，则T^*中包含P_2, 于是(P_1中的xu-段)+P_2+(P_1中的vy-段)是T^*中的xy-通路，$\therefore T^*$中含xy-简单通路(记为P')，则P'+e是T中的简单回路，与树的定义矛盾。



有关树的几个等价命题

- 设T是简单无向图，下列四个命题等价：
  - (1) T是不包含简单回路的连通图。//树的定义
  - (2) T中任意两点之间有唯一简单通路。
  - (3) T连通，但删除任意一条边则不再连通。
  - (4) T不包含简单回路，但在任意不相邻的顶点对之间加一条边则产生唯一的简单回路。
- 备注：
  - 树是边最少的连通图
  - 树是边最多的无简单回路的图

树中边和点的数量关系

- 设T是树，令$n=|V_T|$, $m=|E_T|$, 则$m=n-1$。
- 证明. 对n进行归纳证明。当$n=1$, T是平凡树，结论显然成立。

  假设当$n\le k$时结论成立。

  若$n=k+1$。因为T中每条边都是割边，任取$e\in E_T$, $T-\{e\}$含两个连通分支，设其为T_1, T_2, 并设它们边数分别是m_1, m_2, 顶点数分别是n_1, n_2, 根据归纳假设：$m_1=n_1-1$, $m_2=n_2-1$。注意：$n_1+n_2=n$, $m_1+m_2=m-1$。

  $\therefore m= m_1+m_2+1=n-1$。

连通图边数的下限

- 顶点数为n（$n\geq 2$）的连通图，其边数$m\geq n-1$。

  ($对于树，m=n-1，“树是边最少的连通图”$)

- 证明：对n进行一般归纳。当n=2时结论显然成立。

  设G是边数为m的连通图，且$|V_G|=n>2$。任取$v\in V_G$，令$G'=G-v$,设G’有$\omega(\omega\geq 1)$个连通分支$G_1,G_2,\ldots,G_\omega$，且G_i的边数和顶点数分别是m_i和n_i。

  我们有$n=n_1+n_2+\ldots+n_\omega+1$，$m\geq m_1+m_2+\ldots+m_\omega+\omega$ (每个连通分支中至少有一个顶点在G中与删除的v相邻)。

  由归纳假设，$m_i\geq n_i-1(i=1,2,\ldots\omega)$。

  所以：$m\geq m_1+m_2+\ldots+m_\omega+\omega\geq n_1+n_2+\ldots+n_\omega-\omega+\omega=n-1$。

与边点数量关系有关的等价命题

- 设T是简单无向图，下列三个命题等价：

(1) T是树。

(2) T不含简单回路，且$m=n-1$。

(3) T连通，且$m=n-1$。

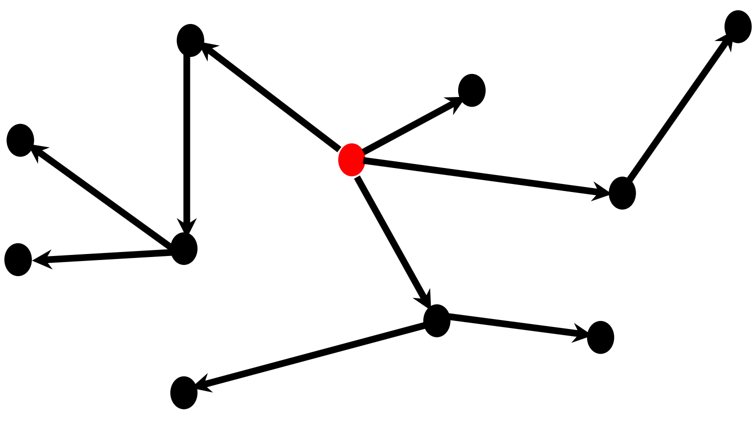
- (1)⇒(2)，已证。
- (2)⇒(3)，若不连通，分支数$\omega \geq 2$，各分支为树（无简单回路、连通），则$m=n-\omega<n-1$，矛盾。
- (3)⇒(1)，设e是T中任意一条边，令$T'=T-e$，且其边数和顶点数分别是m'和n，则$m'=m-1=n-2<n-1$，$\therefore T'$是非连通图。因此，T的任意边均不在简单回路中，$\therefore T$中无简单回路。

本节提要

- 内容1：树的定义及其性质
  - 树就是不包含简单回路的连通无向图
  - 树是边最少的连通图；也是边最多的无简单回路的图
- 内容2：根树以及有序根树的遍历

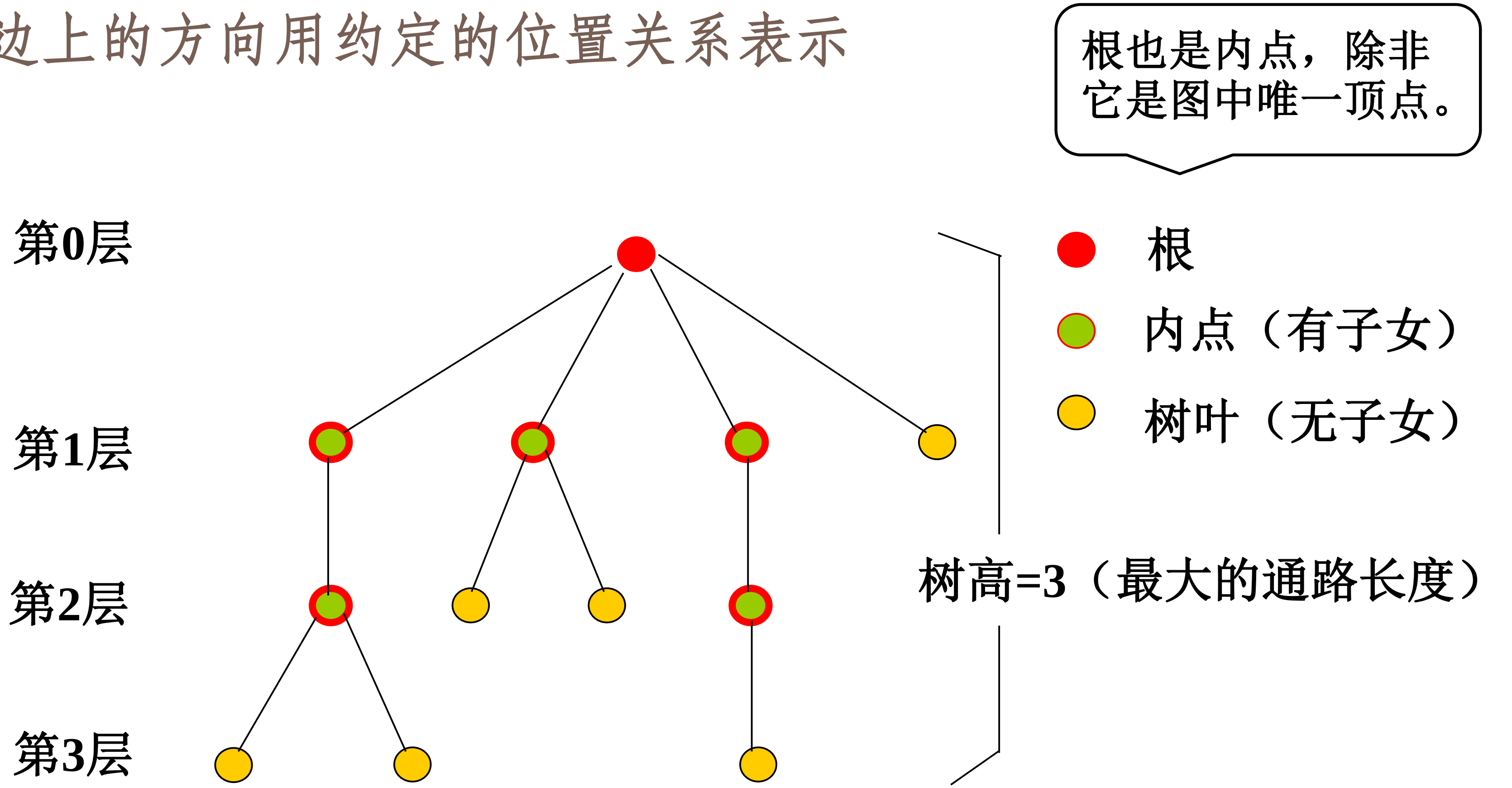
根树的定义

- 定义：底图为树的有向图称为*有向树*。
- 定义：若有向树恰含一个入度为0的顶点，其它顶点入度均为1，则该有向树称为*根树*，那个入度为0的顶点称为*根*。
  - 若v_0是根树T的根，则对T中任意其它顶点v_n，存在唯一的有向v_0v_n-通路，但不存在v_nv_0-通路。



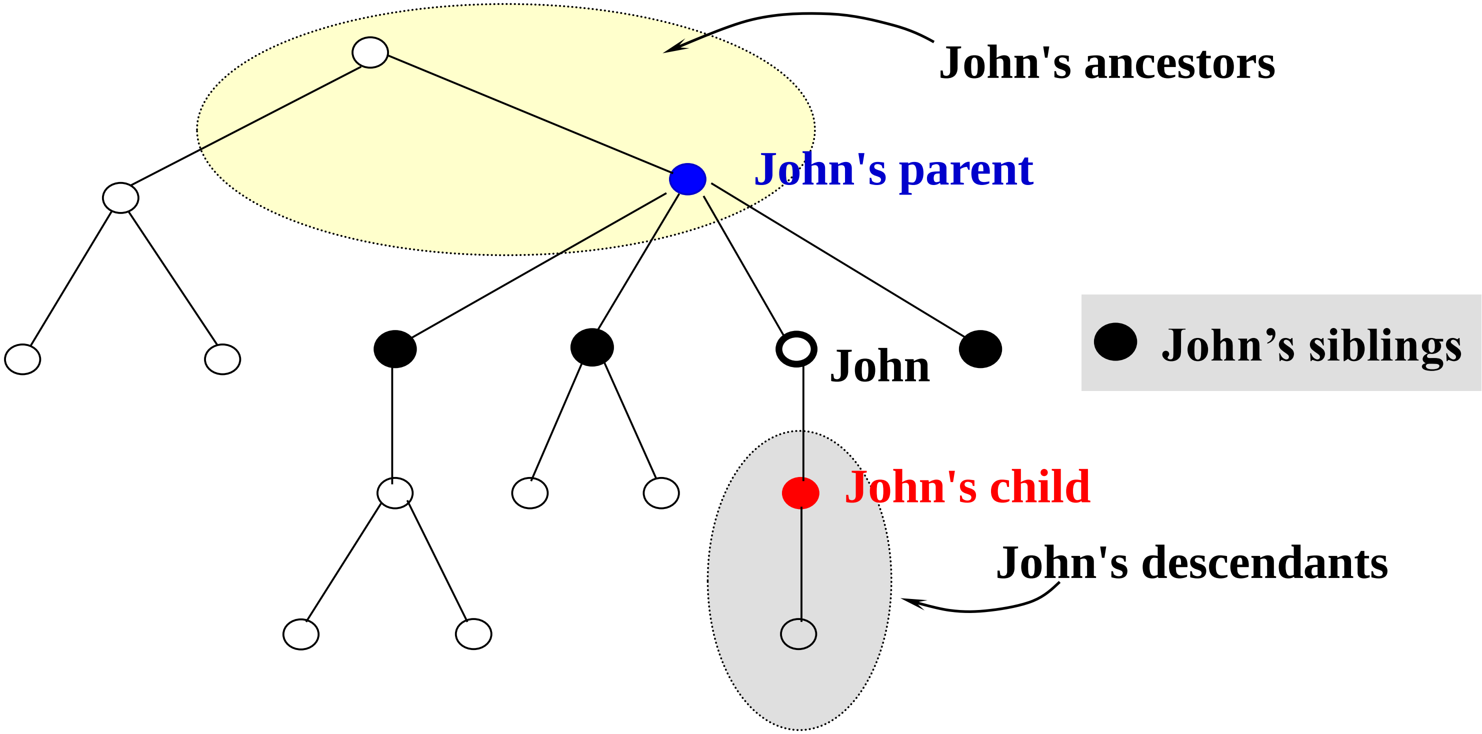
根树的图形表示

- 边上的方向用约定的位置关系表示



根树与家族关系

- 用根树容易描述家族关系，反之，家族关系术语被用于描述根树中顶点之间的关系。

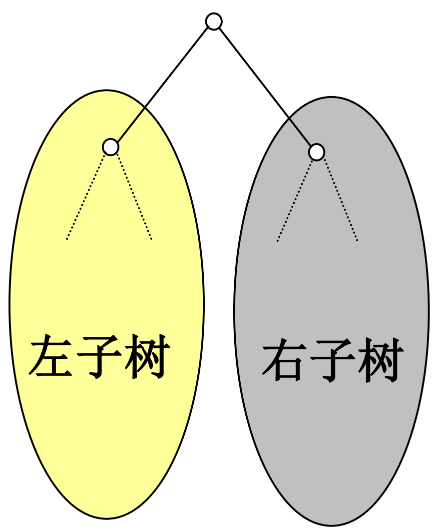


根树的几个术语

- **m**元树：每个内点<u>至多</u>有**m**个子女
  - 2元树也称为二叉树
- 满***m***元树 (***full* m-ary tree**)
  - 每个内点<u>恰好</u>有**m**个子女
- 完全**m**元树(***complete* m-ary tree**)
  - 假设有**h**层：除第**h**层外，其它各层的结点数都达到最大个数，第**h**层所有的结点都连续集中在最左边
- 平衡：树叶都在**h**层或**(h-1)**层**, h**为树高
- 有序：同层中每个顶点排定次序
  - 有序二叉树通常也简称为二叉树

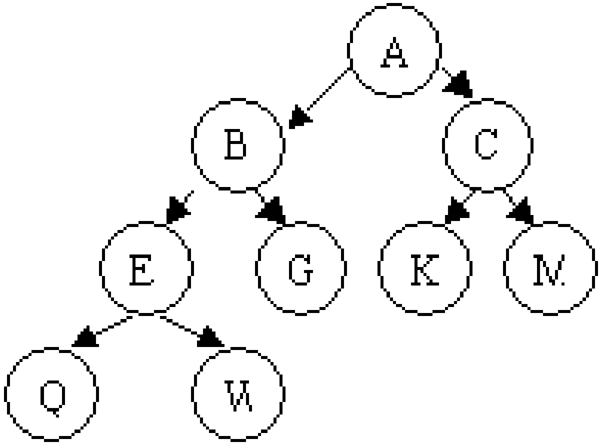
根树的几个术语（续）

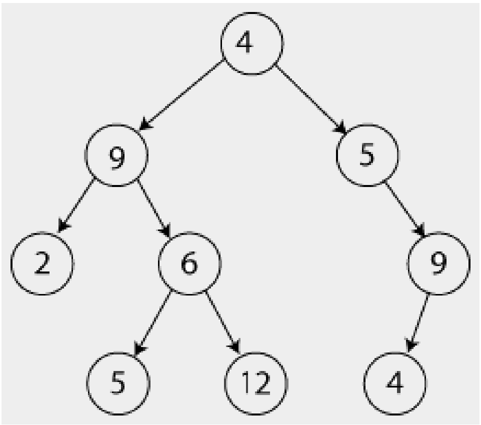
- 定义：设T是根树，T中任一顶点v及其所有后代的导出子图显然也是根树(以v为根)，称为T的根子树。
- 有序二叉树的子树分为左子树和右子树

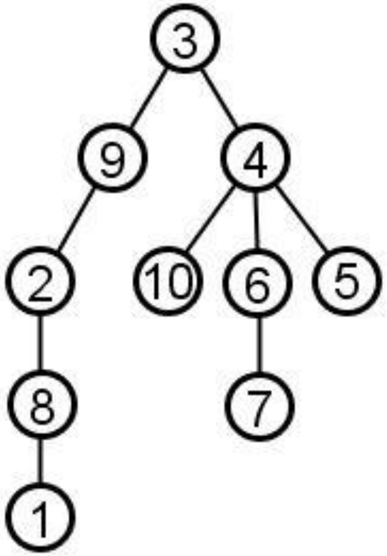


例

- 树的高度、各顶点所处的层数
- 满、完全、平衡







满m元树的顶点数

- 设T是满m元树，
  - 若T有n个顶点，则有$i=(n-1)/m$个内点和$l=[(m-1)n+1]/m$个树叶.
  - 若T有i个内点，则有$n=mi+1$顶点和$l=(m-1)i+1$个树叶.
  - 若T有l个树叶，则有$n=(ml-1)/(m-1)$ 个顶点和$i=(l-1)/(m-1)$ 个内点.

$n-1 = m\times i$ （入度总数=出度总数）

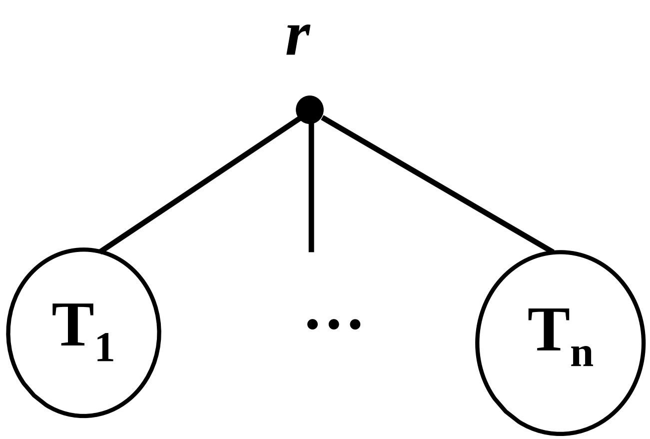
$n = i + l$ （顶点分为内点和树叶）

高度为h的m元树的顶点数

- 高度为h的m元树最多有个m^h个树叶。
  - 按照高度h进行归纳证明。（第1层顶点最多为m个）
- 若高度为h的m元树有l个树叶，则$h \geq \lceil \log_m l \rceil$.
  - 如果这棵树是完全的，则有$h = \lceil \log_m l \rceil$.

有序根树的遍历

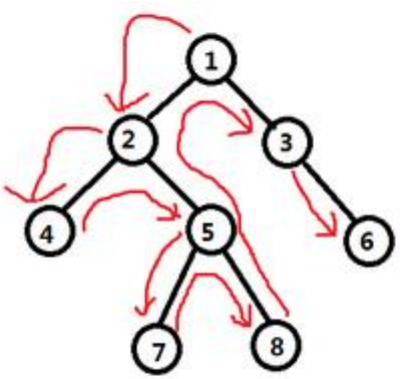
- 前序遍历 （preorder）
  - T只包含根r，则为 r;
  - T的子树为$T_1, \ldots, T_n$, 则为 r, preorder(T_1), …, preorder(T_n)



有序根树的遍历

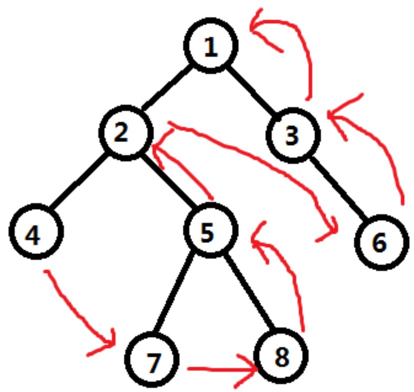
前序遍历

（preorder）



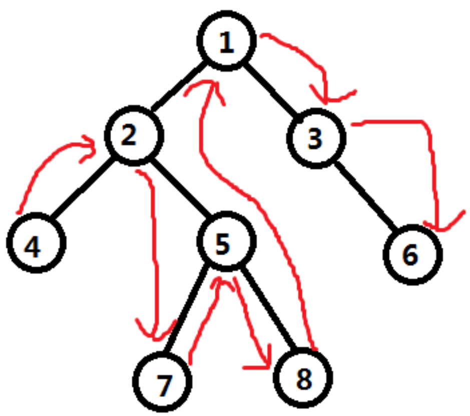
后序遍历

（postorder）



中序遍历

（postorder）



本节小结

- 内容1：树的定义及其性质
  - 树就是不包含简单回路的连通无向图
  - 树是边最少的连通图；也是边最多的无简单回路的图
- 内容2：根树以及有序根树的遍历
  - 根数：一个入度为0的顶点，其它顶点入度均为1
  - 完全树、平衡树、有序树
  - 有序根树的前中后遍历

作业

- 见课程网站

例题

- 画出所有6个顶点的非同构的无向树
  - 度数序列只能是:
    - 1 1 1 1 1 5; 1 1 1 1 2 4; 1 1 1 1 3 3;
    - 1 1 1 2 2 3; 1 1 2 2 2 2
- 已知一个7阶无向树中有三个树叶，一个3度顶点（其余三个顶点度数均不为1、3），画出所有满足要求的非同构无向树
  - 度数只能是1112223，考虑度数为3顶点的邻居

得 分	

六、（本题满分 12 分）

令 $D=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 为一正整数序列，且 $n\geq 2$ 。

a） 若D恰好是某个树T的各个顶点的度数序列，试证明

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$$

b） 反过来，试证明：若D满足上式，则存在一个树T，使得D恰好是T的各个顶点的度数序列。

c） 假设D满足上式。试证明：可将D中各整数划分为两个序列S_1, S_2, 使得S_1中正整数之和与S_2中正整数之和相等。

得分	

七、（本题满分 12 分）

对于一个含有n个元素的集合S，令$A_1, A_2, \dots, A_n$为S的n个互不相等的子集。试证明：存在S的元素x，使得$A_1 \cup \{x\}, A_2 \cup \{x\}, \dots, A_n \cup \{x\}$依然是n个互不相等的子集。（提示：构造节点为$A_1, A_2, \dots, A_n$的图）