树的应用

回顾

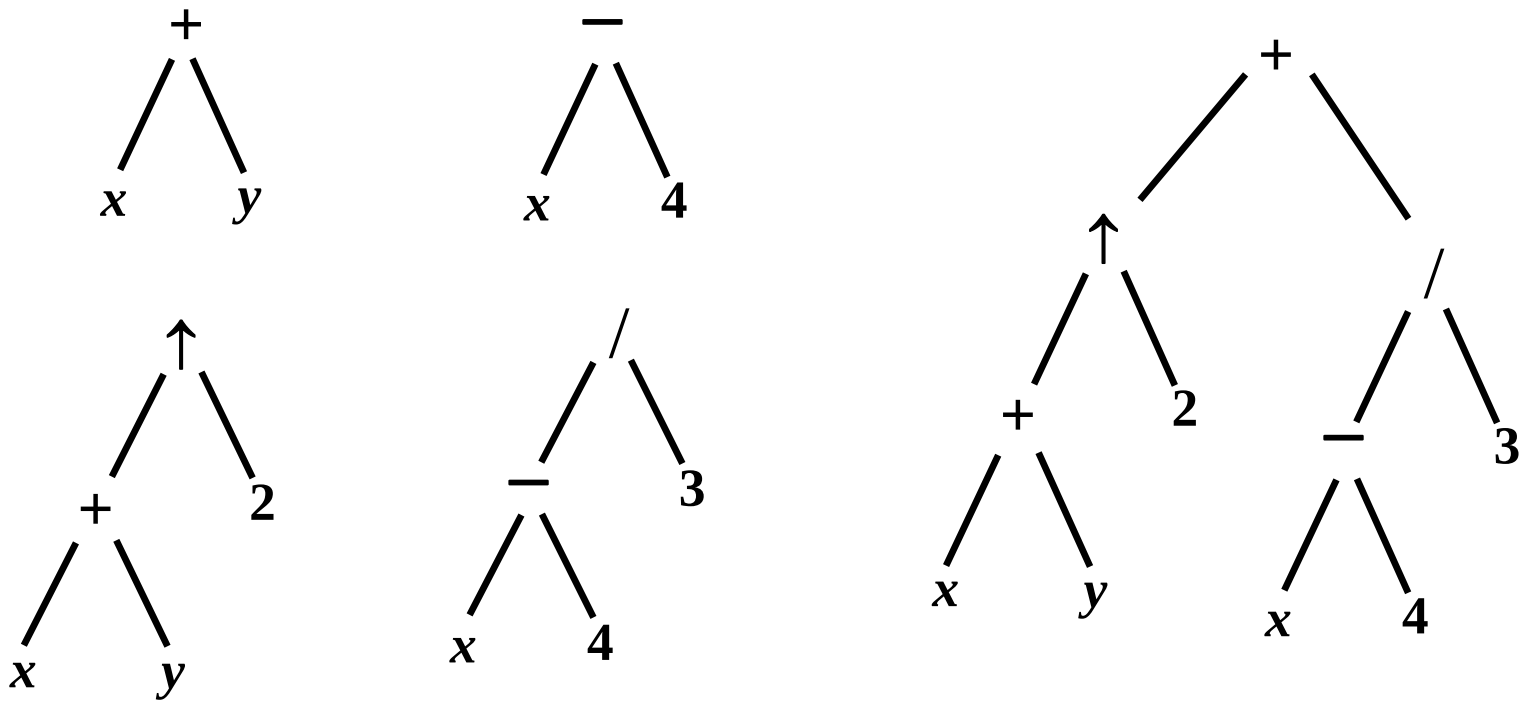
- 内容1：树的定义及其性质
  - 树就是不包含简单回路的连通无向图
  - 树是边最少的连通图；也是边最多的无简单回路的图
- 内容2：根树以及有序根树的遍历
  - 根数：一个入度为0的顶点，其它顶点入度均为1
  - 完全树、平衡树、有序树
  - 有序根树的前中后遍历

本节提要

- 内容1：表达式的（逆）波兰记法
- 内容2：二叉搜索树
- 内容3：前缀码与Huffman编码

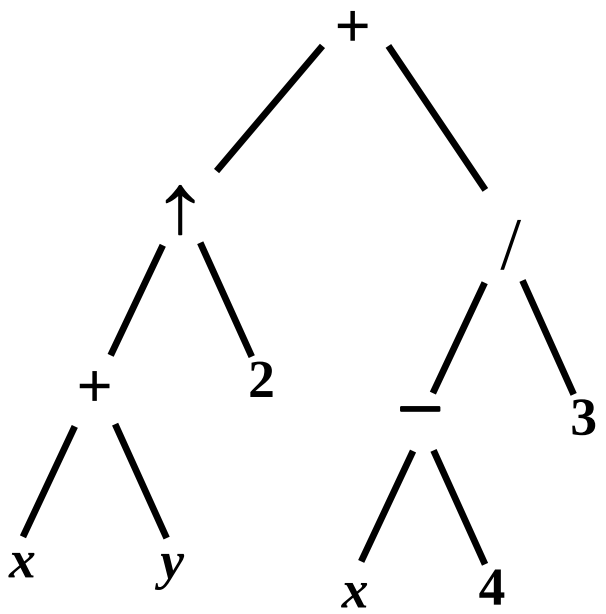
表达式的根树表示

- 用根树表示表达式：内点对应于运算符，树叶对应于运算分量。
- 举例：((x+y)↑2+ ((x-4)/3)



表达式的（逆）波兰表示法

- **(*x*+*y*)↑2+ ((*x*-4)/3)**
- 前缀形式（波兰表示法）
  - **+↑+*xy*2 /-*x*4 3**
- 后缀形式（逆波兰表示法）
  - ***xy*+2↑ *x*4- 3/+**
- 中缀形式
  - ***x*+*y*↑2+ *x*-4/3**

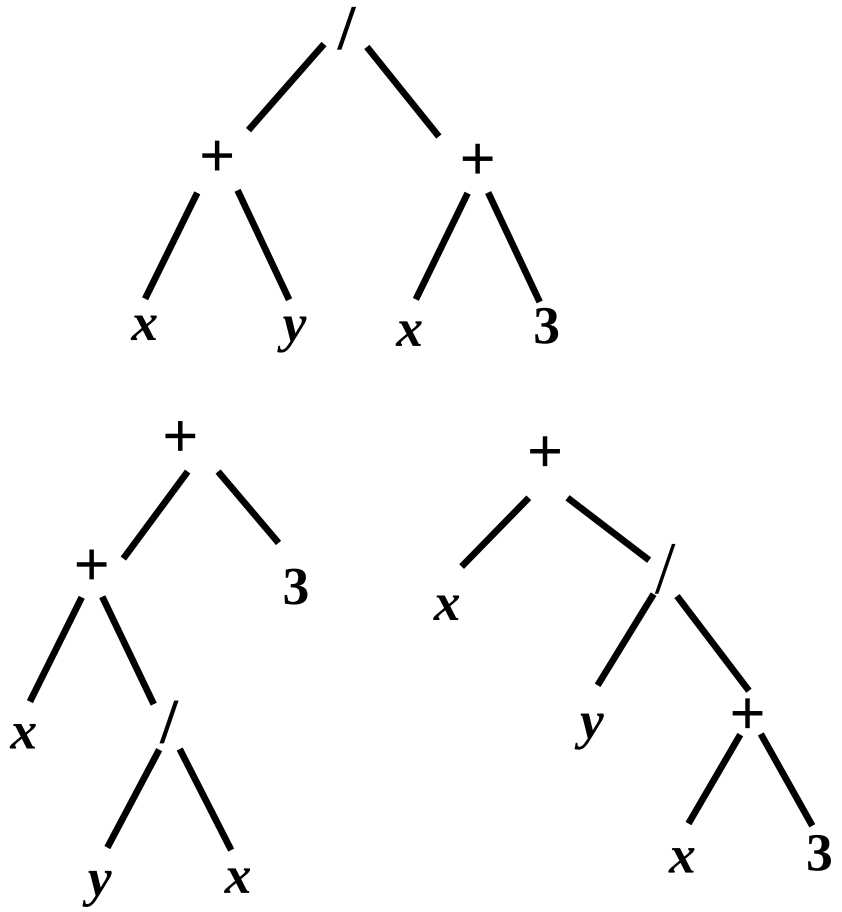


中缀表示法的缺陷

- 中缀形式：*x*+*y*/*x*+3
  - 有3种解释:
  - (*x*+*y*)/(*x*+3)
  - *x*+*y*/*x*+3
  - *x*+*y*/(*x*+3)

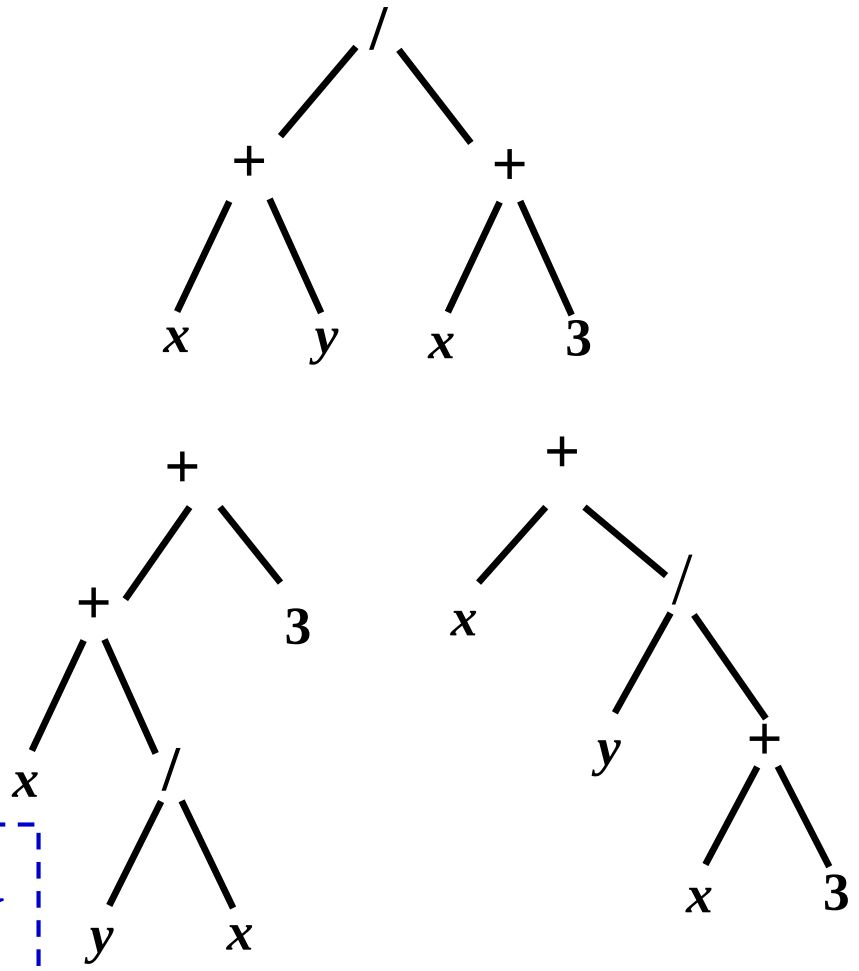
不同的根树有相同的中缀形式。

前缀与后缀则具有唯一性



前缀表示法（波兰表示法）

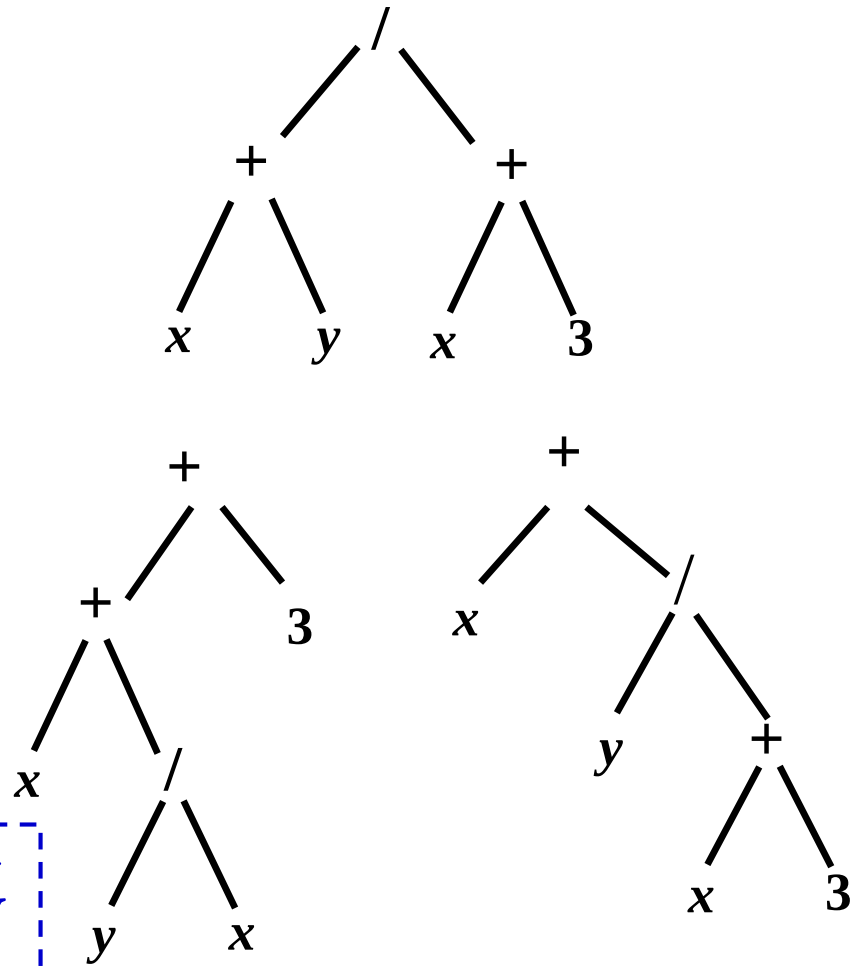
- $(x+y)/(x+3)$
  - $/+xy+x3$
- $x+y/x+3$
  - $++x/yx3$
- $x+y/(x+3)$
  - $+x/y+x3$



从右向左，遇到运算符，对右边紧接着的2个运算对象进行运算

后缀表示法（逆波兰表示法）

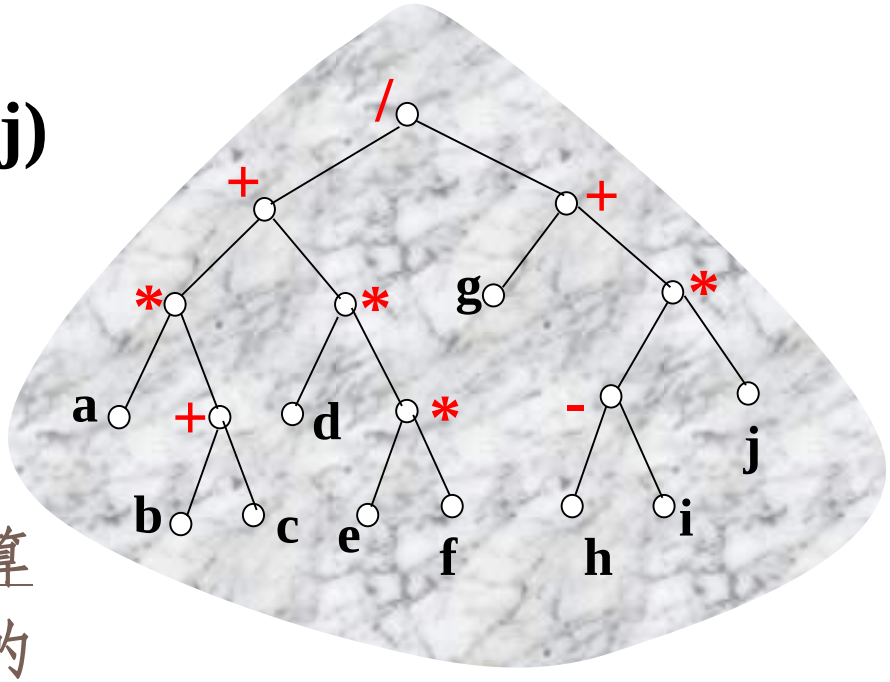
- (*x*+*y*)/(*x*+3)
  - *xy*+*x*3+/
- *x*+*y*/*x*+3
  - *xyx*/+3+
- *x*+*y*/(*x*+3)
  - *xyx*3+/+



从左向右，遇到运算符，对左边紧接着的2个运算对象进行运算

例

- **(a*(b+c)+d*(e*f))/(g+(h-i)*j)**
- 逆波兰表示：
  - **abc+*def**+ghi-j*+/**

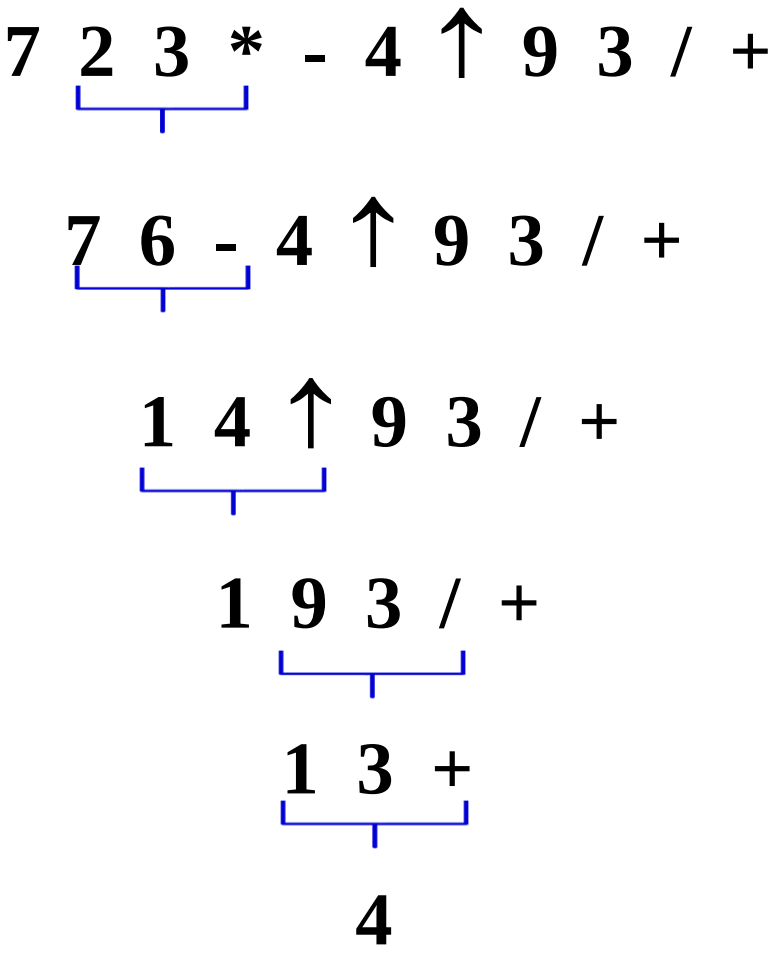


从左往右，遇到运算符，根据运算符所需运算分量个数确定前面的元素作为运算分量。

不需要括弧唯一地表示计算顺序。

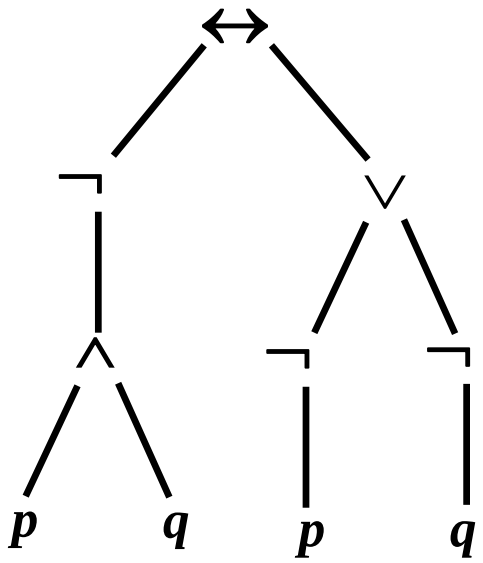
例

后缀表达式求值：



复合命题的根树表示

命题：(¬(p∧q)) ↔ (¬p∨¬q)



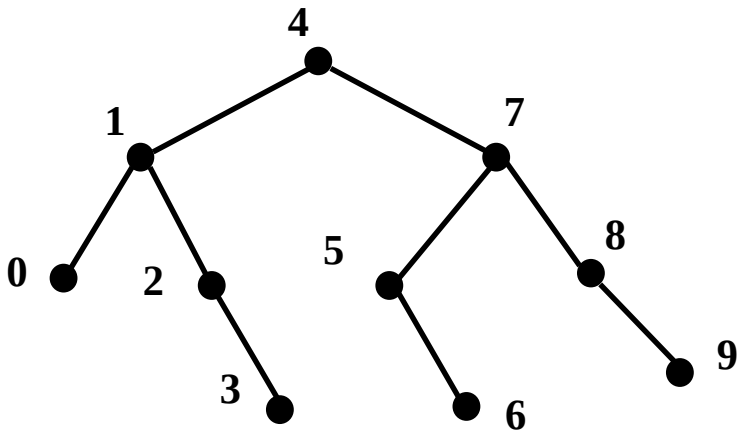
后缀形式：pq∧¬p¬q¬∨↔

本节提要

- 内容1：表达式的（逆）波兰记法
- 内容2：二叉搜索树
- 内容3：前缀码与Huffman编码

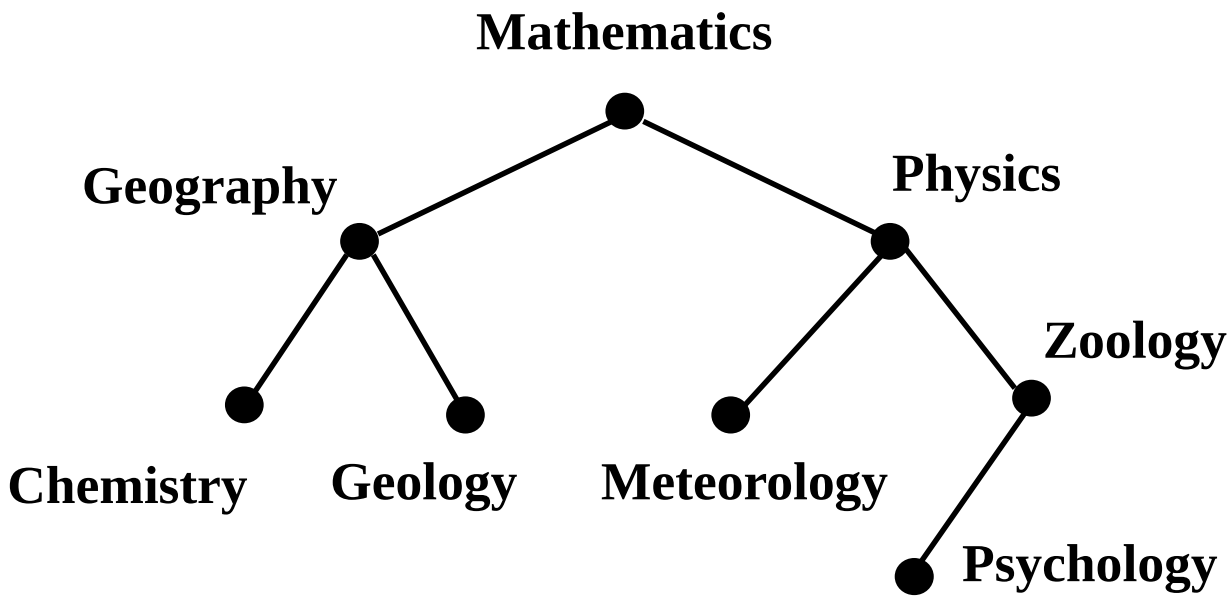
二叉搜索树

- 二叉搜索树满足下列条件
  - 二叉树，各顶点的子女非左即右，左或右都不超过一个。
  - 每个顶点有一个唯一的标号，该标号取自一个全序集。
  - 若***u***是树中任意的顶点，则：
    - ***u*** 的左子树中任意顶点的标号小于***u*** 的标号。
    - ***u*** 的右子树中任意顶点的标号大于***u*** 的标号。



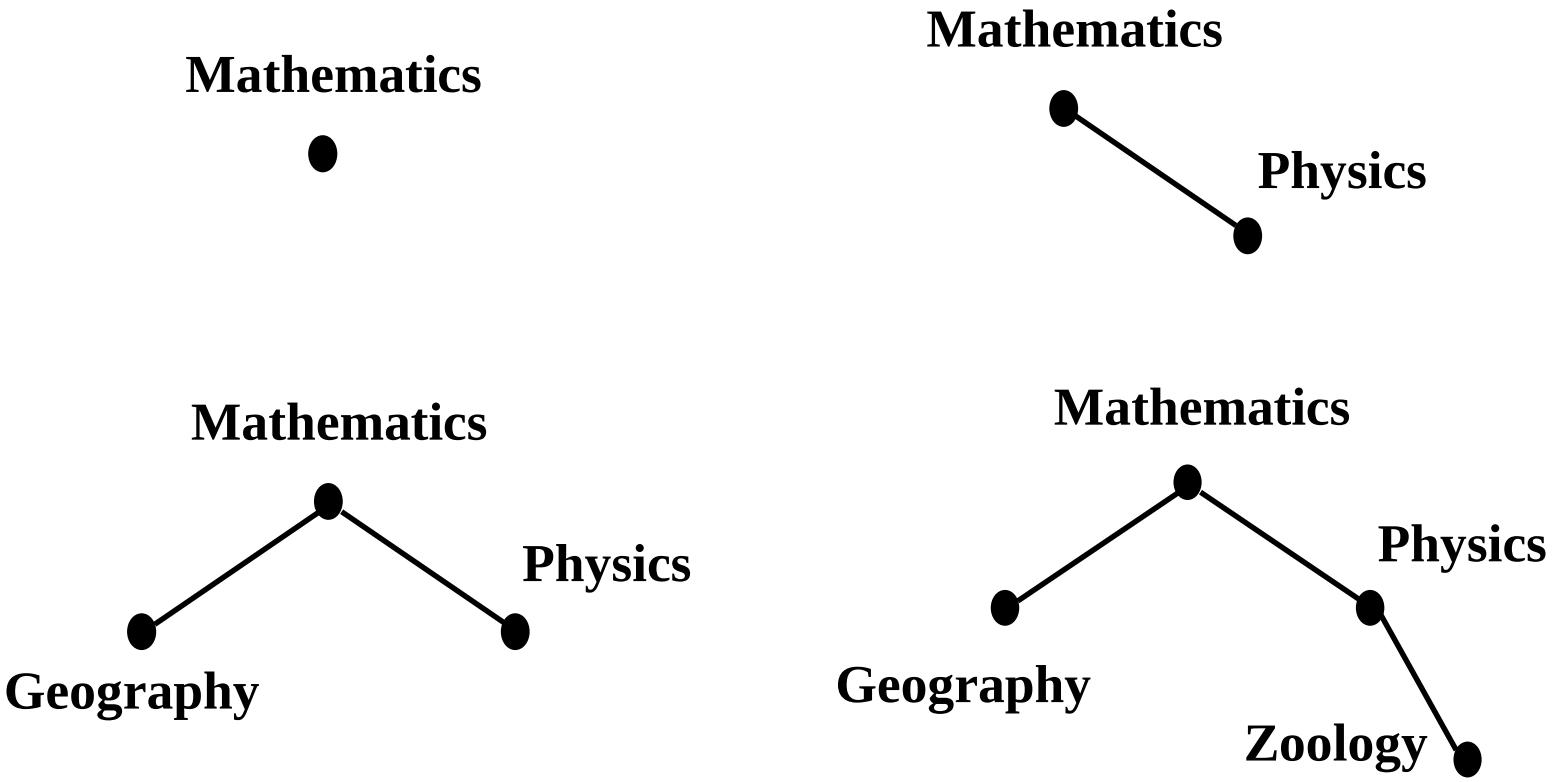
构造二叉搜索树

mathematics, physics, geography, zoology, meteorology, geology, psychology, chemistry



构造二叉搜索树

mathematics, physics, geography, zoology, …



二叉搜索树算法*

Procedure insertion(T: binary search tree, *x*:item) //定位或添加

v:=root of T //*v*可能为null

if *v*=null then add a vertex to the tree and label it with *x*

while *v* !=null and label(*v*) != *x* {

if *x* < label(*v*) then

if left child of *v* !=null then *v*:= left child of *v*

else add *new vertex* as a left child of *v* and set *v*:=null

else

if right child of *v* !=null then *v*:= right child of *v*

else add *new vertex* as a right child of *v* and set *v*:=null

}

if *v* is null then label *new vertex* with *x* and let *v* be this *new vertex*

return *v*

本节提要

- 内容1：表达式的（逆）波兰记法
- 内容2：二叉搜索树
- 内容3：前缀码与Huffman编码

编码

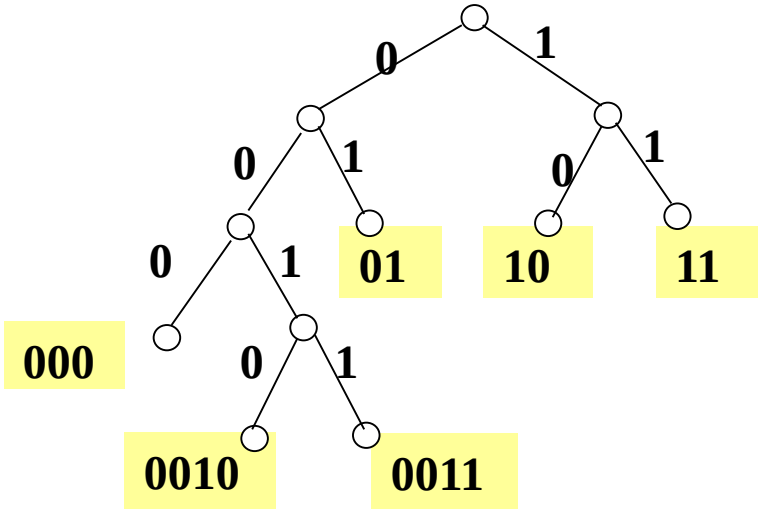
- 如何从信号流中识别字符
  - 等长度编码 vs. 不等长度编码
- 例子：对包含{a(45),b(13),c(12),d(16),e(9),f(5)}6个字符的10万个字符的数据文件编码，每个字符后面的数字表示该字符出现的频率(%)。
  - 编码方案一：a(000), b(001), c(010), d(011), e(100), f(101); 则文件总长度30万字位。
  - 编码方案二：a(0), b(101), c(100), d(111), e(1101), f(1100); 则文件总长度22.4万字位，空间节省四分之一。

不等长编码的分隔

- 如何从信号流中识别不等长编码表示的字符
  - 显式表示长度：专用位或特定结束信号
  - 匹配的唯一性（比如，前缀码）
- 如果符号串α可以表示成符号串β_1和β_2的并置，则β_1称为α的一个前缀。(注意：β_1和β_2可以是空串。)
- 设$A=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m\}$是符号串的集合，且对任意$\beta_i,\beta_j \in A$, 若$i \neq j$, β_i与β_j互不为前缀，则称A为前缀码。
- 若A中的任意串β_i只含符号0, 1, 则称A是二元前缀码。

用二叉树生成二元前缀码

- 构建二叉树，每个树叶对应一个字符
  - 给边标号：对内点，对其出边标上号，左为0，右为1。
  - 给叶编号：从根到每个树叶存在唯一的通路，构成该通路的边的标号依次并置，所得作为该树叶的编号。

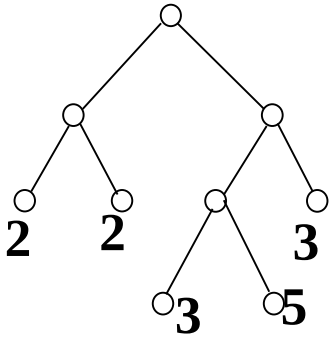


最优前缀码

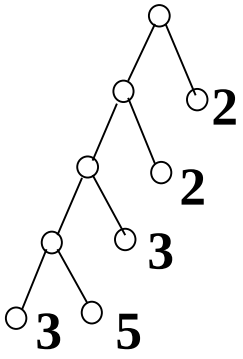
- 问题：二元前缀码$A=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m\}$表示m个不同的字母，如果各字母使用频率不同，如何设计编码方案可以使总传输量最少。
- 基本思想：使用频率高的字母用尽量短的符号串表示。
- 问题的解：若用频率(相对值)作为树叶的权，最佳二元前缀码对应的二叉树应该是最优二叉树。

最优二叉树

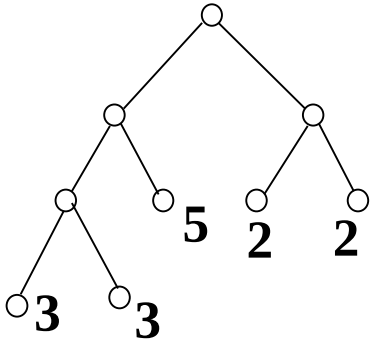
- 若T是二叉树，且每个叶$v_1,v_2,\ldots,v_t$带数值权$w_1,w_2,\ldots w_t$，则二叉树T的权$W(T)$定义为：$\Sigma^t_{i=1}w_i l(v_i)$，其中：$l(v_i)$表示v_i的层数。
- 具有相同权序列的二叉树中权最小的一棵树称为最优二叉树。



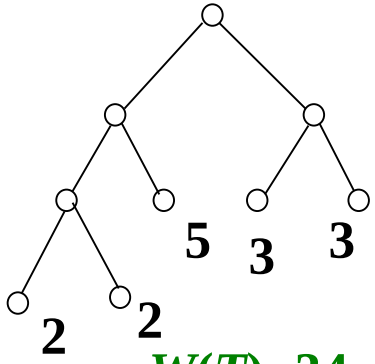
$W(T)=38$



$W(T)=47$



$W(T)=36$



$W(T)=34$

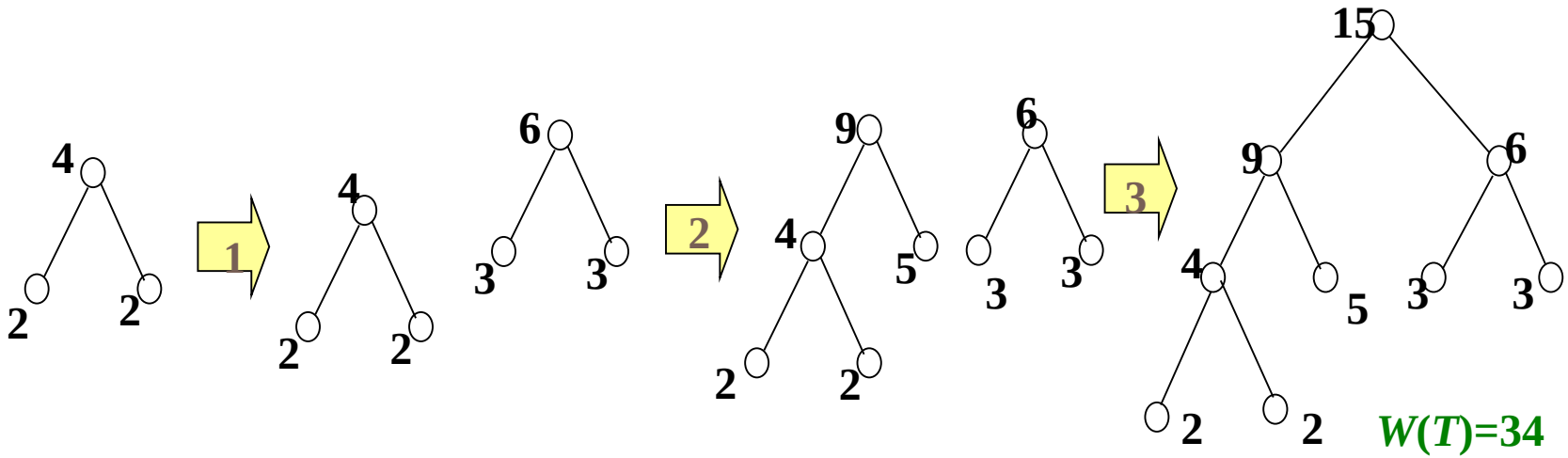
Huffman编码

- 输入：正实数序列$w_1,w_2,\ldots,w_t$。
- 输出：具有t个树叶，其权序列为$w_1,w_2,\ldots,w_t$的最优二叉树。
- 过程：
  - t棵根树（森林），其根的权分别是$w_1,w_2,\ldots,w_t$。
  - 选择根权最小的两棵树，以它们为左、右子树（合并）生成新的二叉树，其根权等于2棵子树的根权之和。
  - 重复第2步，直至形成一棵树。

注意：结果可能不唯一(如果“当前”权最小顶点对不唯一)。

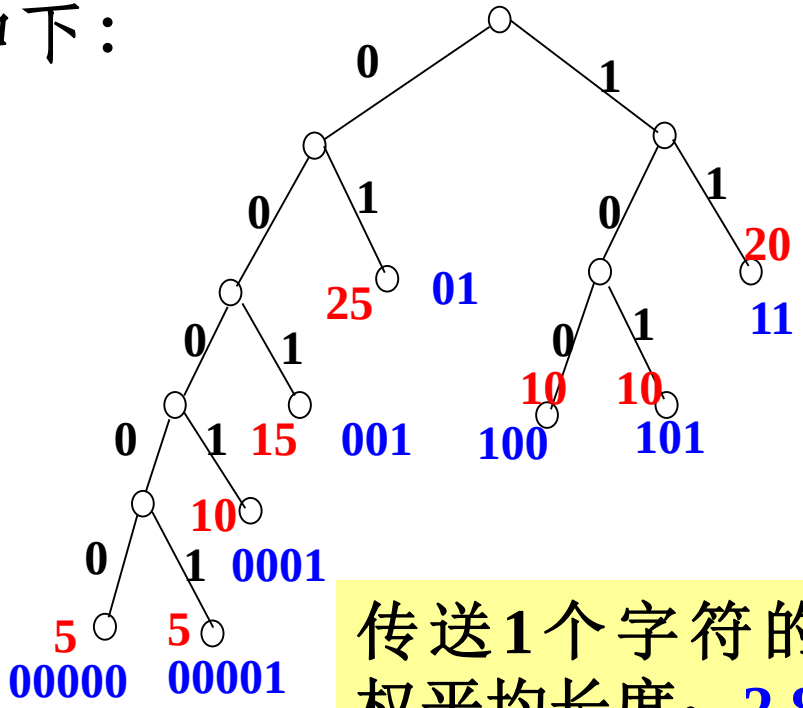
Huffman编码

- 例子：开始序列：2,2,3,3,5
  - 1步后：4,3,3,5
  - 2步后：4,6,5
  - 3步后：9,6



一个应用示例

- 八个字符的传输问题
  - 假设八个字符的频率如下：
    - 0：25%　1: 20%
    - 2: 15%　3: 10%
    - 4: 10%　5: 10%
    - 6: 5%　7: 5%
  - 则对应的权为：
    - 25,20,15,10,10,10,5,5



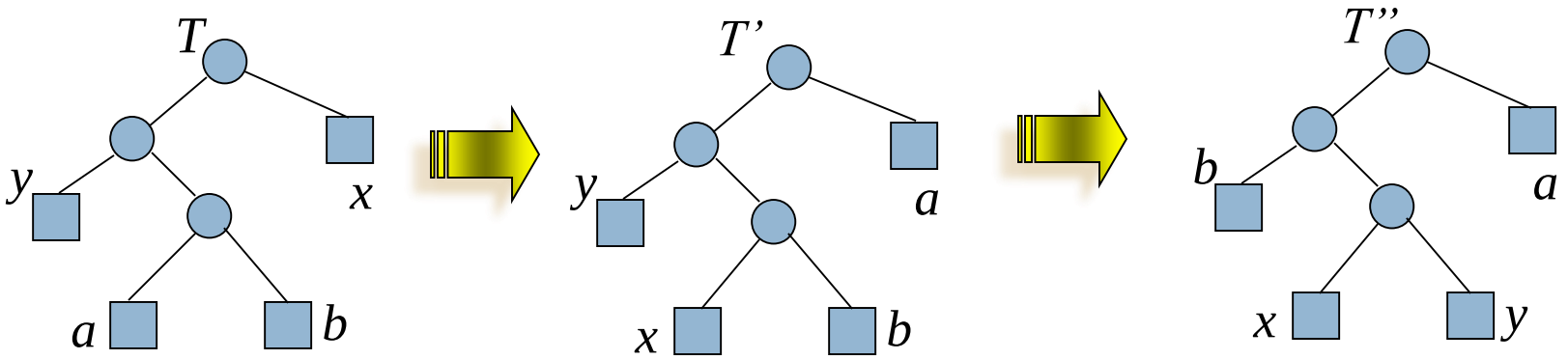
传送1个字符的加权平均长度：2.85

作业

- 见课程网站

Huffman算法的正确性

设*C*是字母表，其中每个字符*c*的频率为*f*[*c*]。若*x*,*y*是两个频率最小的字符，则必存在*C*的一种最优前缀码，使得*x*,*y*的编码仅有最后一位不同。



*T*为任意最优前缀码

在上图的变换中，二叉树的权保持不变，即：$W(T) \geq W(T') \geq W(T'') \geq W(T)$

保持权不变的变换

不妨假设$f[a] \le f[b], f[x] \le f[y]$; 于是$f[x] \le f[a], f[y] \le f[b]$

$$W(T) - W(T') = \sum_{c \in C} f(c) d_T(c) - \sum_{c \in C} f(c) d_{T'}(c)$$

$$= f[x] d_T(x) + f[a] d_T(a) - f[x] d_{T'}(x) - f[a] d_{T'}(a)$$

$$= f[x] d_T(x) + f[a] d_T(a) - f[x] d_T(a) - f[a] d_T(x)$$

$$= (f[a] - f[x])(d_T(a) - d_T(x)) \ge 0$$

$\therefore W(T) \ge W(T')$; 同理, $W(T') \ge W(T'')$; 但$W(T)$最小

$\therefore W(T) = W(T') = W(T'')$

Huffman算法的正确性（续）

C是字母表，$f[c]$为字符c的频率，x,y是两个频率最小的字符。令C'=C-{x,y}∪{z}, $f[z]=f[x]+f[y]$, 若T'是C'的最优二叉树，则将顶点z替换为分支点，并以x,y为其子女，所得T是C的一棵最优二叉树。

$d_T(x)=d_T(y)=d_{T'}(z)+1,$

因此, $f[x]d_T(x)+f[y]d_T(y)=(f[x]+f[y])(d_{T'}(z)+1)$

$=f[z]d_{T'}(z)+(f[x]+f[y])$

于是, $W(T)=W(T')+(f[x]+f[y])$

如果存在T''满足$W(T'')<W(T)$, 不失一般性，x与y在T''中为siblings.

将x, y连同它们的父结点替换为一叶结点z, 并令$f[z]=f[x]+f[y]$,

设得到的新树为T''', 则：

$W(T''')=W(T'')-f[x]-f[y]<W(T)-f[x]-f[y]=W(T')$, 矛盾。

得 分	

八、（本题满分 12 分）

最优集合合并问题可描述为：将有穷多个集合两两合并，每次合并后产生的新集合的元素数为两个待合并的集合元素数目之和（假设集合两两之间皆无相同元素），每次合并所需的代价也为两个待合并的集合元素数目之和；求当最终将所有集合合并为一个集合时，合并的最小总代价.

例如，集合A，B和C分别有1个、2个和5个元素，先将集合A与集合B合并，代价为$1+2=3$，再将合并后的新集合与集合C合并，代价为$3+5=8$，因此合并这三个集合的总代价为$3+8=11$；但若先合并集合A和C，总代价就为14，若先合并集合B和C，总代价就为15. 故合并上述三个集合的最小总代价为11.

(1) 若待合并集合的元素数分别为14、27、6、13、5、35，求合并最小总代价；

(2) 试给出计算n个集合（给定各自元素数目）的**合并次序**，使合并总代价最小的算法（可用自然语言描述，也可用伪代码或流程图描述）.