关系与函数

回顾

问题1：什么是集合?

- 集合无定义，通过外延法、概括法描述

问题2：集合的基本概念有哪些?

- 子集、空集、幂集、自然数（归纳集）、笛卡尔积

问题3：如何进行集合运算与集合公式证明?

- 集合的交并补、对称差、广义并、广义交
- 集合定义、恒等式、逻辑推演等

本节提要

问题1：什么是关系？如何表示关系？如何进行关系运算？

问题2：什么是函数？什么是单射、满射函数？如何进行函数运算？

笛卡尔积(回顾)

- 对任意集合A, B
  笛卡尔积 $A\times B = \{(a, b) \mid a\in A, b\in B\}$
  - 例： $\{1,2,3\}\times\{a,b\} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$

- $A=\{1,2\}$， $\mathrm{P}(A)\times A=?$

- $|A|=m, |B|=n, |A\times B|=?$
  - 若A，B是有限集合， 则$|A\times B|= |A|\times|B|$

二元关系

- 若A, B是集合,从A到B的一个关系R是$A\times B$的一个子集. ($R\subseteq A\times B$)
  - 关系是集合, 可以是空集(空关系)
  - 集合的元素是有序对
  - 若$A=B$: 称为“集合A上的(二元)关系”
  - 例如:常用的数学关系(不大于、整除、集合包含)、网页链接、文章引用、相互认识
  - n元集合上有多少种不同的关系?

二元关系

- 相关记号：令 $R \subseteq A \times B$
  - $(a, b) \in R$ 可简记为 aRb
  - $(a, b) \notin R$ 可简记为 $\neg aRb$ 或者 $a \not R b$
  - $aRb \wedge bRc$ 可简记为 $aRbRc$

特殊的二元关系

- 集合A上的空关系∅: 空关系即空集
- 全域关系 E_A: $E_A=\{ (x, y) \mid x, y \in A \}$
- 恒等关系 I_A : $I_A=\{(x, x) \mid x\in A \}$
- 函数 f: $A\rightarrow B$

  $R=\{ (x, f(x)) \mid x\in A \}$是一个从$A$到$B$的一个关系

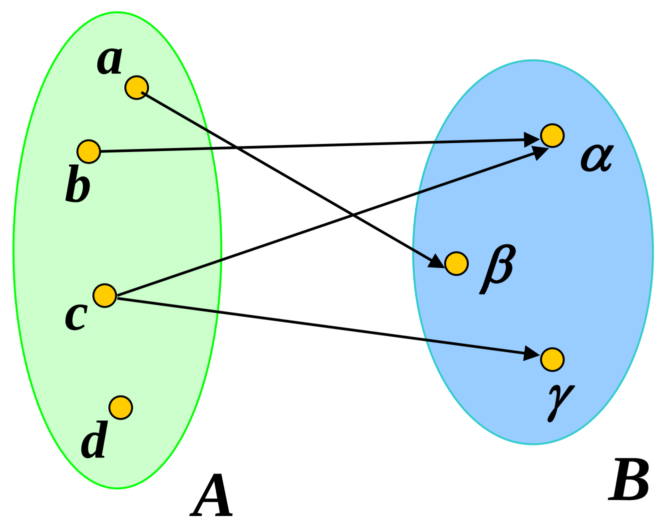
关系的表示

- 假设$A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ // 假设为有限集合
- 集合表示: $R_1=\{(a,\beta),(b,\alpha),(c,\alpha),(c,\gamma)\}$

0-1矩阵

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

有向图



二元关系和有向图

关系 $R \subseteq A \times B$ ⟷ 有向图 (V_D, E_D)

A和B是集合

有序对集合

$(x,y) \in R$

若$A=B$, R中存在序列：(x_1,x_2), (x_2,x_3),…,(x_{n-1},x_n)

顶点集 $V_D= A \cup B$

有向边集E_D

从x到y有一条边

图D中存在从 x_1 到 x_n 的长度为 n-1的通路

关系的运算(1)

- 关系是集合，所有的集合运算对关系均适用
  - 例:
    - 自然数集合上: “$<$” $\cup$ “$=$” 等同于 “$\leq$”
    - 自然数集合上: “$\leq$” $\cap$ “$\geq$” 等同于 “$=$”
    - 自然数集合上: “$<$” $\cap$ “$>$” 等同于$\varnothing$

关系的运算(2)

- 与定义域和值域有关的运算
  - dom $R = \{x \mid \exists y\,(x,y)\in R\}$
  - ran $R = \{y \mid \exists x\,(x,y)\in R\}$
  - fld $R =$ dom $R \cup$ ran R
  - $R\uparrow A = \{(x,y) \mid x\in A \wedge xRy\} \subseteq R$ *restriction* 也记作 $R \restriction A$, $R|A$
  - $R[A] = \{y \mid \exists x\,(x\in A \wedge (x,y)\in R)\} = \mathrm{ran}(R\uparrow A) \subseteq \mathrm{ran}R$
- 例：
  - $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{1,3,5,6\}$, A上关系R:

    $R=\{(1,2), (1,4),(2,3),(3,5),(5,2)\}$,

    求 R↑B、R[B]

关系的运算(3)

- 逆运算
  - $R^{-1} = \{ (x, y) \mid (y,x) \in \mathrm{R} \}$
    - 注意:如果R是从A到B的关系,则R^{-1}是从B到A的。
  - $(R^{-1})^{-1} = R$
  - 例子: $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$
    - $(x, y) \in (R_1 \cup R_2)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in (R_1 \cup R_2)$

      $\Leftrightarrow (y, x) \in R_1$ 或 $(y, x) \in R_2$

      $\Leftrightarrow (x, y) \in R_1^{-1}$ 或 $(x, y) \in R_2^{-1}$

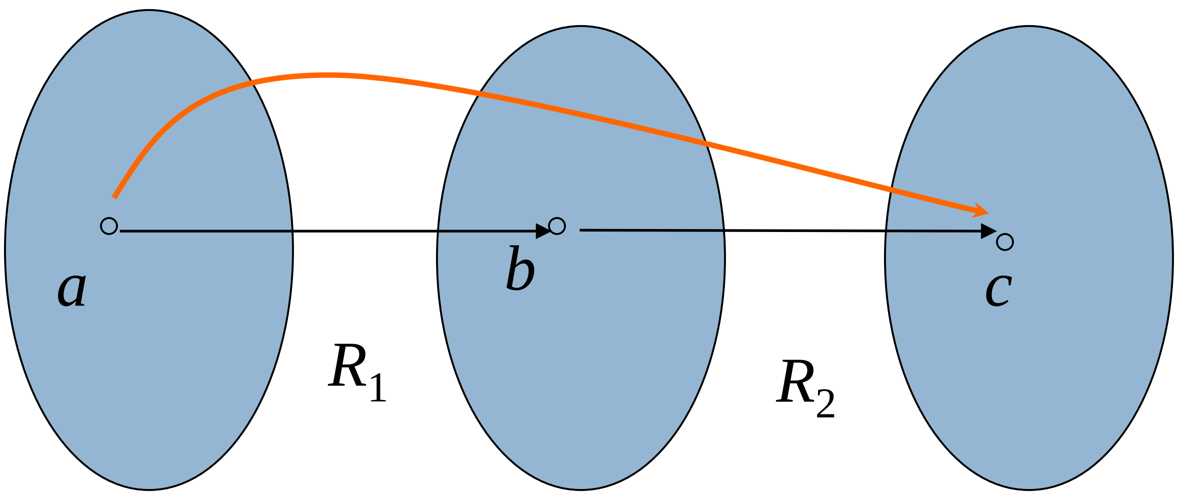
关系的运算(4)

- 关系的复合（合成, Composition）

  设 $R_1 \subseteq A\times B$, $R_2 \subseteq B\times C$,

  R_1与R_2的复合（合成），记为 $R_2\circ R_1$, 定义如下：

  $R_2\circ R_1=\{(a, c)\in A\times C \mid \exists b\in B\,((a, b)\in R_1 \wedge (b, c)\in R_2)\}$



例：关系的复合运算

- 设$A=\{a, b, c, d\}$, R_1, R_2为A上的关系，其中：

  $R_1 = \{ (a, a), (a, b), (b, d)\}$

  $R_2 = \{(a, d), (b, c), (b, d), (c, b)\}$

  则：

  $R_2 \circ R_1 = \{(a, d), (a, c)\}$

  $R_1 \circ R_2 = \{(c, d)\}$

  $R_1^2 = \{(a, a), (a, b), (a, d)\}$

关系的复合运算的性质

- 结合律
  - 给定$R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$, $R_3 \subseteq C \times D$, 则：

    $$(R_3 \circ R_2) \circ R_1 = R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$$

  - 证明左右两个集合相等

- 复合关系的逆关系
  - 给定$R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$, 则：

    $$(R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$$

  - 同样，证明左右两个集合相等

关系的复合运算的性质

- 对集合并运算满足分配律
  - 给定$F\subseteq A\times B$, $G\subseteq B\times C$, $H\subseteq B\times C$, 则：

    $(G\cup H)\circ F = (G\circ F) \cup (H\circ F)$
- 对集合交运算：$(G \cap H)\circ F \subseteq (G\circ F) \cap (H\circ F)$
  - 注意：等号不一点成立。

    $A=\{a\}$, $B=\{s,t\}$, $C=\{b\}$;

    $F=\{(a,s), (a,t)\}$, $G=\{(s,b)\}$, $H=\{(t,b)\}$;

    $G\cap H=\varnothing$, $(G\circ F) \cap (H\circ F)=\{(a,b)\}$

0-1矩阵运算

$$M_{R_1\cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2}$$
$$M_{R_1\cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2}$$
$$M_{R_2\circ R_1} = M_{R_1} \otimes M_{R_2}$$

- 令0-1矩阵$M_1=[a_{ij}]$, $M_2=[b_{ij}]$:
  - $C=M_1 \wedge M_2$: $c_{ij}=1$ iff. $a_{ij}=b_{ij}=1$
  - $C=M_1 \vee M_2$: $c_{ij}=1$ iff. $a_{ij}=1$或$b_{ij}=1$
- 令r×s矩阵$M_1=[a_{ij}]$； s×t矩阵$M_2=[b_{ij}]$:
  - $C=M_1 \otimes M_2$: $c_{ij}=1$ iff. $\exists k(a_{ik}=1 \wedge b_{kj}=1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

关系运算的矩阵法

$$M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \otimes M_{R_2}$$

证明：

令$R_1 : X \to Y; R_2 : Y \to Z;$

令$\mathrm{A} = \mathrm{M}_{\mathrm{R}_1}$，$\mathrm{B} = \mathrm{M}_{\mathrm{R}_2}$，$\mathrm{C} = \mathrm{M}_{\mathrm{R2} \circ \mathrm{R1}}$，$\mathrm{D} = \mathrm{M}_{\mathrm{R}_1} \otimes \mathrm{M}_{\mathrm{R}_2}$有

$$c_{ij} = 1 \Leftrightarrow \langle x_i, z_j \rangle \in R_2 \circ R_1 \Leftrightarrow \exists y_k \in Y(\langle x_i, y_k \rangle \in R_1 \wedge \langle y_k, z_j \rangle \in R_2)$$

$$\Leftrightarrow a_{ik} = 1 \wedge b_{kj} = 1 \Leftrightarrow d_{ij} = 1$$

For $n \geq 2$, and R a relation on a finite set A, we have

$$M_{R^n} = M_R \otimes M_R \otimes \cdots \otimes M_R \quad (n \text{ factors})$$

本节提要

问题1：什么是关系？如何表示关系？如何进行关系运算？

- 笛卡尔积的子集；集合、矩阵、有向图；逆与复合、矩阵法

问题2：什么是函数？什么是单射、满射函数？如何进行函数运算？

函数

- 设 A 和 B 为非空集合，从集合A到B的函数 f 是对元素的一种指派，对A的每个元素恰好指派B的一个元素。记作 f:A→B。
  - f:A→B：函数的型构
  - f的定义域（domain）是A，f的伴域（codomain）是B
  - 如果 f 为A中元素a指派的B中元素为b，就写成 $f(a)=b$。此时，称 b是a的像，而a是b的一个原像。
  - A中元素的像构成的集合称为f的值域 range （f的像 image）。
- 函数也称为映射(mapping)或变换(transformation)

函数是一种特殊的关系

- A 和 B 为非空集合，若关系 $R \subseteq A \times B$ 满足
  - 对于 A 中的每个元素 a，B 中都有且仅有一个元素 b 使得 aRb

则 R 是一个从 A 到 B 的函数。

如何用逻辑公式表达上述“有且仅有一个”条件?

$$(\forall x, y, z)(xFy \land xFz \rightarrow y = z)$$

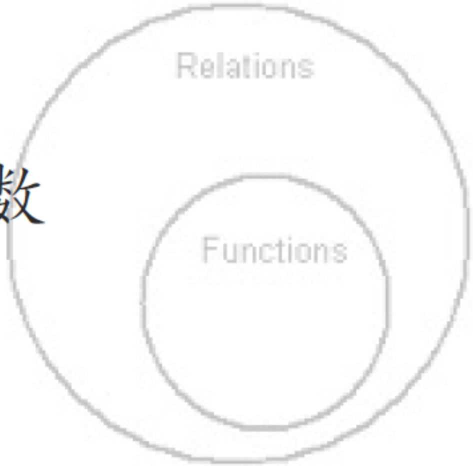
函数举例

- 例：

$F_1 = \{(1,2),(3,2)\}$ 为函数

$F_2 = \{(1,2),(1,3)\}$ 不为函数

$F_3 = \emptyset$ 为函数

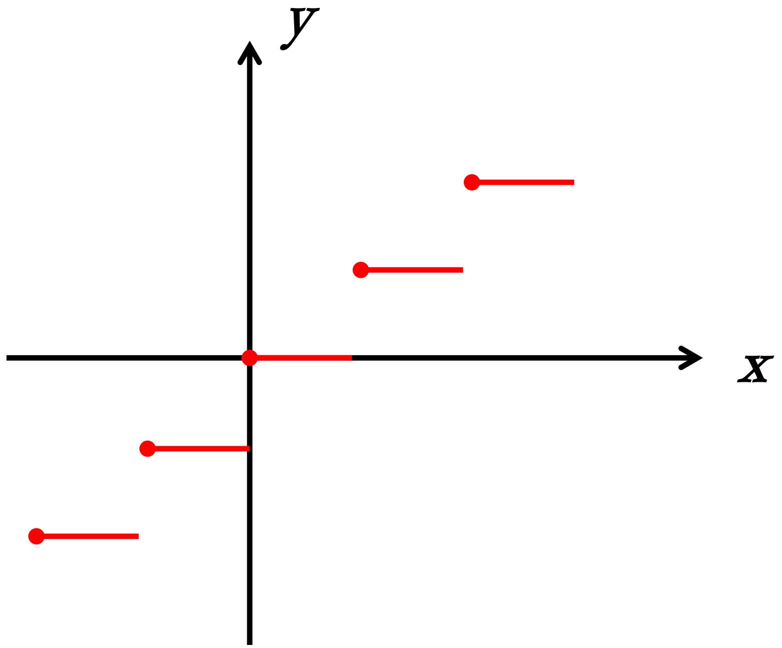


函数举例

- 下取整函数$\lfloor x \rfloor$: $\mathbf{R} \to \mathbf{Z}$

Java Program
int floor(float real) {⋯}

floor: float → int



- 函数 f 的图像: $\{(a, b) \mid a \in A \wedge f(a) = b\}$

函数举例

- 某课程成绩

函数原型

Program

CourseGrade grade(StudentName sname, CourseName cname) {…}

函数型构
(signature)

Function:

Grade: StudentName ×CourseName→ CourseGrade

姓名	课程	成绩
张明	离散数学	A
李宁	程序设计	B
王琴	数据结构	A
…	…	…

函数举例

- 设A为非空集合，A上的恒等函数$\iota_A:A\to A$定义为
  - $\iota_A(x)=x$，$x\in A$
- 设 U 为非空集合，对任意的$A\subseteq U$，特征函数$\chi_A:U\to\{0,1\}$定义为：
  - $\chi_A(x)=1$，$x\in A$
  - $\chi_A(x)=0$，$x\in U-A$

函数的相等

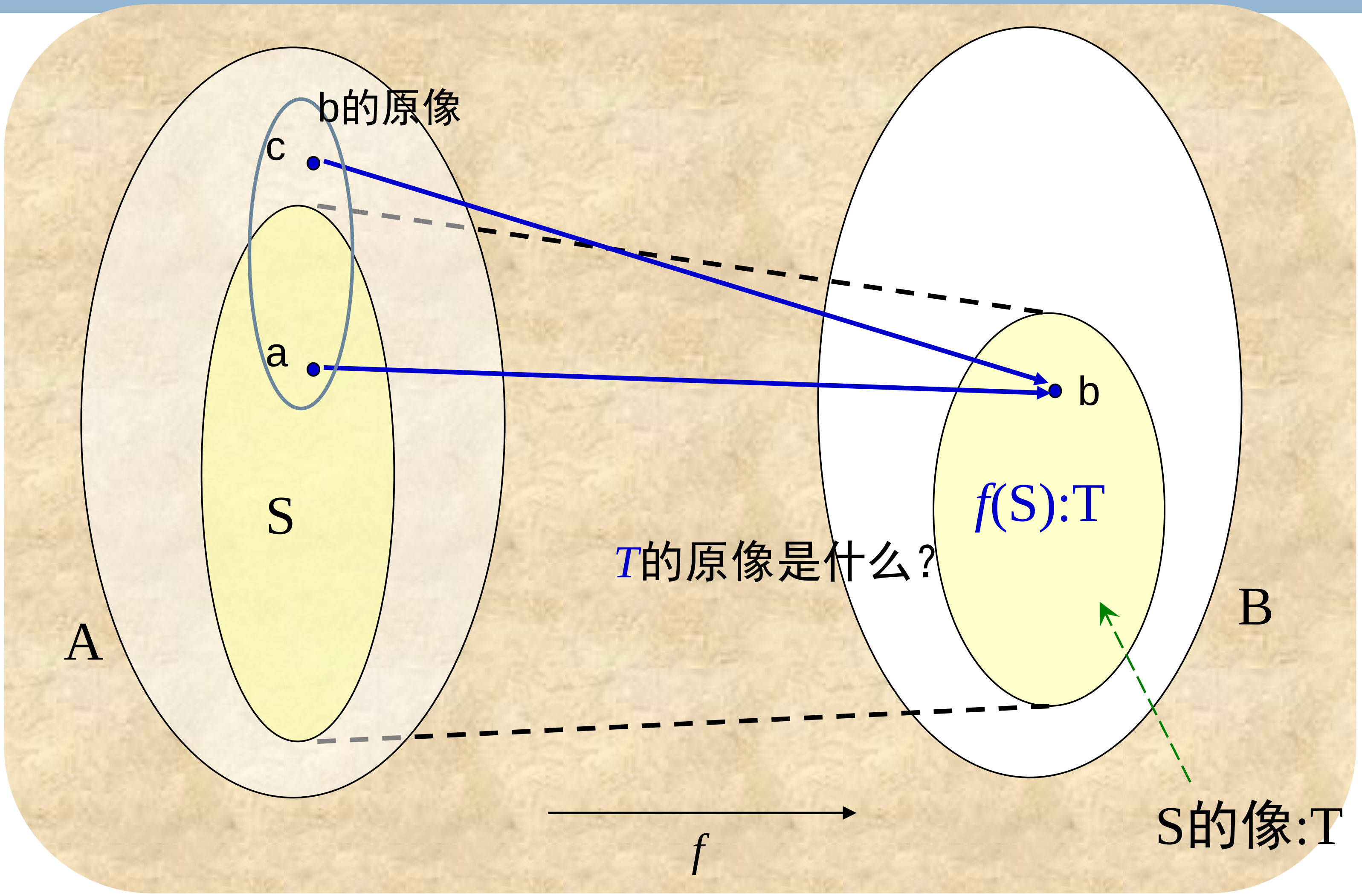
- 函数相等 $f=g$ if
  - $\mathrm{dom}(f)=\mathrm{dom}(g)$
  - $\underline{\mathrm{codom}(f)=\mathrm{codom}(g)}$
  - $\forall x(x\in \mathrm{dom}(f) \rightarrow f(x)=g(x))$
- 若A和B皆是非空的有限集合，从A到B的不同的函数有多少个?

子集在函数下的像

- 设 f 是从集合A到B的函数，S 是A的一个子集。S 在 f下的像，记为$f(S)$，定义如下：
  - $f(S) = \{t | \exists_{s\in S} t = f(s)\}$

- 备注：$f(A)$ 即为 f的值域。

S的像和原像



并集的像

- 设函数 f: A→B，且X，Y是A的子集，则

$$f(X\cup Y) = f(X)\cup f(Y)$$

- 证明:
  - $f(X\cup Y) \subseteq f(X)\cup f(Y)$

    对任意的t，若$t\in f(X\cup Y)$，则存在$s\in X\cup Y$，满足$f(s)=t$; 假设$s\in X$，则$t\in f(X)$，假设$s\in Y$，则$t\in f(Y)$，$\therefore t\in f(X)\cup f(Y)$
  - $f(X)\cup f(Y) \subseteq f(X\cup Y)$

    对任意的t，若$t\in f(X)\cup f(Y)$

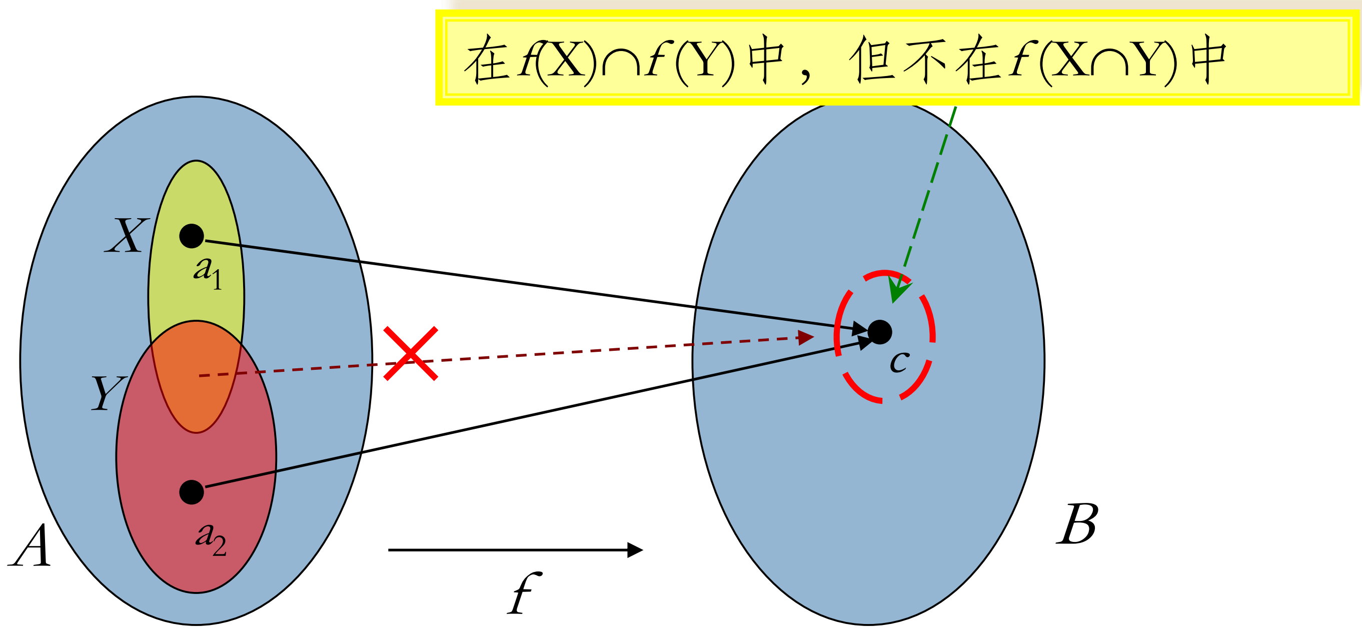
    情况1：$t\in f(X)$，则存在$s\in X\subseteq X\cup Y$，满足$f(s)=t$，$\therefore t\in f(X\cup Y)$

    情况2：$t\in f(Y)$，同样可得$t\in f(X\cup Y)$

    $\therefore t\in f(X\cup Y)$

交集的像

- 设函数 f: A→B，且X，Y是A的子集，则
  - $f(X\cap Y) \subseteq f(X)\cap f(Y)$



特殊类型的函数

- f:A→B是单射（一对一的）
  - injection, injective function, one-to-one function
  - $\forall x_1, x_2 \in A$, 若$x_1 \neq x_2$，则$f(x_1) \neq f(x_2)$
  - //等价的说法：$\forall x_1, x_2 \in A$, 若$f(x_1) = f(x_2)$，则$x_1 = x_2$
- f:A→B是满射（映上的）
  - surjection, surjective function, onto function
  - $\forall y \in B, \exists x \in A$, 使得$f(x) = y$
  - //等价的说法：$f(A)=B$，伴域=值域
- f:A→B是双射（一一对应）
  - bijection, bijective function, one-to-one correspondence
  - 满射+单射

例：特殊类型的函数

- $f{:}R \to R,\ f(x) = -x^2+2x-1$
- $f{:}Z^+ \to R,\ f(x) = \ln x,$ 单射
- $f{:}R \to Z,\ f(x) = \lfloor x \rfloor,$ 满射
- $f{:}R \to R,\ f(x) = 2x-1,$ 双射
- $f{:}R^+ \to R^+,\ f(x) = (x^2+1)/x$
- $f{:}R \times R \to R \times R,\ f(\langle x,y \rangle) = \langle x+y,\ x-y \rangle,$ 双射
- $f{:}N \times N \to N,\ f(\langle x,y \rangle) = |x^2-y^2|$

例：特殊类型的函数

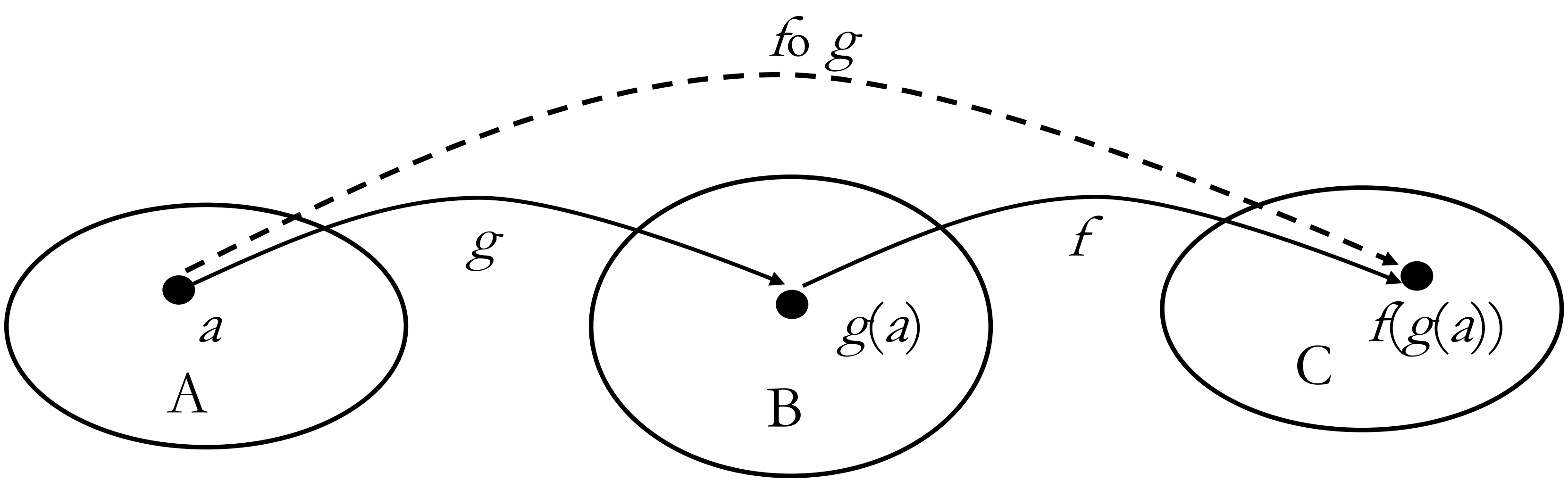
- 判断f:$R\times R\rightarrow R\times R$, $f(<x,y>) = <x+y, x-y>$的性质
- 单射?
  - 令$f(<x_1, y_1>) = f(<x_2, y_2>)$
    - $x_1+y_1=x_2+y_2$且$x_1-y_1=x_2-y_2$,易见： $x_1=x_2$且$y_1=y_2$
    - $<x_1, y_1>=<x_2, y_2>$
- 满射?
  - 任取$<a, b> \in R\times R$，总存在$<(a+b)/2,(a-b)/2>$,使得
  - $f(<(a+b)/2,(a-b)/2>)=<a, b>$

反函数

- 设f是从A到B的一一对应，f的反函数是从B到A的函数，它指派给B中元素b的是A中满足$f(a)=b$的（唯一的）a。f的反函数记作f^{-1}。
  - $f(a)=b$ 当且仅当 $f^{-1}(b)=a$
  - *任何函数都有反函数吗?*
    - 函数f存在反函数当且仅当f是双射函数
- 例子
  - $f:R\times R\rightarrow R\times R$, $f(<x,y>) = <x+y, x-y>$
  - $f^{-1}:R\times R\rightarrow R\times R$, $f^{-1}(<x,y>) = <?, ?>$

函数的复合

- 设g是从A到B的函数，f是从B到C的函数，f和g的复合用$f\circ g$表示，定义为：
  - $(f\circ g)(x)= f(g(x))$， $x\in A$

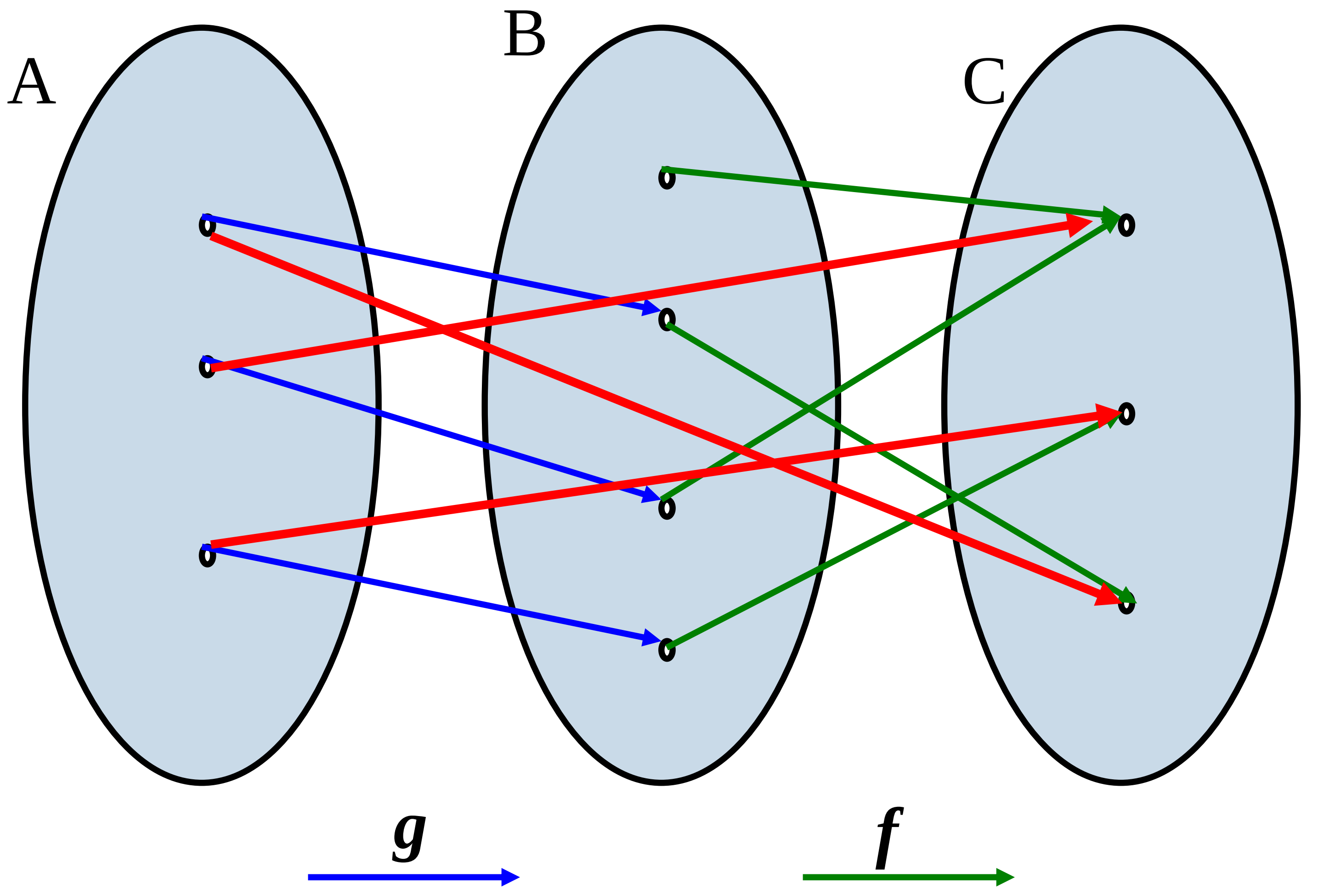


复合运算的性质

- 函数的复合满足结合律
  - $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- 满射的复合是满射
- 单射的复合是单射
- 双射的复合是双射
- 设f是从A到B的双射
  - $f^{-1} \circ f = \iota_A$
  - $f \circ f^{-1} = \iota_B$

但是…

- 若$f\circ g$是满射，能推出f和g是满射吗?
  - f一定是满射，g不一定是满射。
- 若$f\circ g$是单射，能推出f和g是单射吗?
  - g一定是单射，f不一定是单射。


A
B
C
g
f

函数的加法、乘法

- 设f和g是从A到R的函数，那么 $f+g$ 和 $f\,g$也是从A到R的函数，其定义为
  - $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$， $x\in A$
  - $f\,g(x) = f(x)\,g(x)$， $x\in A$

递增（递减）函数

- 设f的定义域和伴域都是实数(或其子集)，
- f是递增的
  - $\forall x \forall y (x<y \rightarrow f(x) \leq f(y))$
- f是严格递增的
  - $\forall x \forall y (x<y \rightarrow f(x) < f(y))$

例

- 自然数$1,2,3,\cdots,n^2+1$的任何一种排列中，必然含一个长度不小于$n+1$的严格递增链或严格递减链。
    - 7,4,3,5,2,1,9,8,6,10//////10,3,2,6,4,7,5,9,1,8
    - 在所给的序列中，以k开始的严格递增序列长度为$I(k)$，以k开始的严格递减序列长度为$D(k)$。
    - $f: k \to (I(k), D(k)),\ k \in \{1,2,\cdots, n^2+1\}$
        - f(7)=(3,5),f(4)=(4,4),f(3)=(4,3),f(5)=(3,3),f(2)=(3,2),f(1)=(3,1)
        - f(9)=(2,3),f(8)=(2,2),f(6)=(2,1),f(10)=(1,1)
    - f是单射：对于$k_1<k_2$，如果k_1排在k_2前面，则$I(k_1)>I(k_2)$，如果k_2排在k_1前面，则$D(k_2)>D(k_1)$。
- 反证法：给定任一种排列，假设严格递增与递减序列最大长度均不大于n:
    - f的值域最多有n^2个元素
    - f不可能是单射

本节小结

问题1：什么是关系？如何表示关系？如何进行关系运算？

- 笛卡尔积的子集；集合、矩阵、有向图；逆与复合、矩阵法

问题2：什么是函数？什么是单射、满射函数？如何进行函数运算？

- 函数是特殊的关系（所有定义域元素唯一指派）；单射满足若$f(x_1)=f(x_2)$，则$x_1=x_2$，满射满足f(A)=B；反函数、复合函数

作业

- 见课程网站