集合的基数

回顾

问题1：什么是关系？如何表示关系？如何进行关系运算？

- 笛卡尔积的子集；集合、矩阵、有向图；逆与复合、矩阵法

问题2：什么是函数？什么是单射、满射函数？如何进行函数运算？

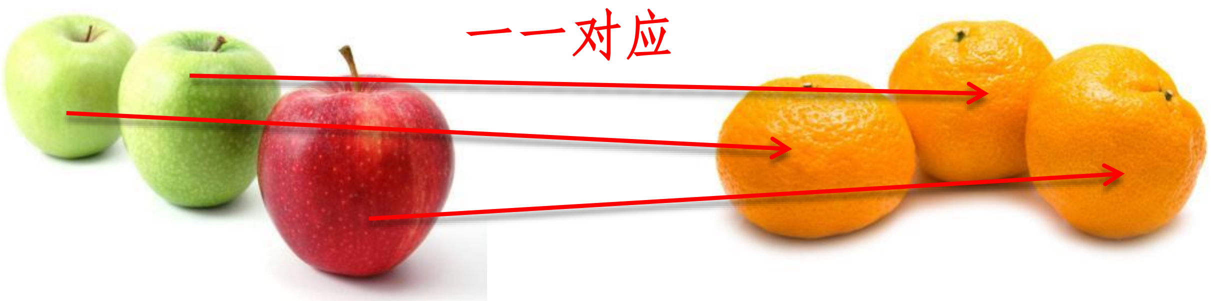
- 函数是特殊的关系（所有定义域元素唯一指派）；单射满足若$f(x_1)=f(x_2)$，则$x_1=x_2$，满射满足**f(A)=B**；反函数、复合函数

本节提要

问题1：什么是集合的基数?
问题2：(基数)最大的集合有多大?
问题3：如何比较两个(无限)集合的大小?

集合的基数

- 集合的基数：集合的元素个数
  - “数得清”的有限集合：元素个数



  - “数不清”的无限集合呢?

    {0, 1, 2, 3, ...} 与 $\{0^2, 1^2, 2^2, 3^2, ...\}$
    各有多少个元素？哪个集合的元素多?

有限与无限：“宇宙旅馆”

啊？客满啦？

没关系，我让现在住在 k 号房间的客人移到 $k+1$ 号。你就住进第1号房间吧！

自然数集合的基数

- 对于有限集合，我们用自然数描述集合的大小
  - 例如，苹果的个数、班级学生的个数
- 那么，自然数有多少个?
  - 给你任意一个自然数，总有比它大的(*)

- 定义自然数个数为$\aleph_0$
  - 读作：**Aleph-null**
  - $\aleph_0$是最小的一个无限数

(*)有些人依然不相信无限的存在。这门课接受无穷公理，即自然数集是无限的。

比较集合的大小：等势关系

- 如果存在从集合A到B的双射，则称集合A与B等势
  - 记为：A≈B, 否则A≉B
  - 双射意味着：A，B中的元素可以“一一对应”
  - 要证明A≈B，找出一个从A到B的双射

  - 集合的势就是集合的基数，记为|A| 或 card A
  - “等势”的集合就被认为是“一样大”

有限集与无限集（1）

- S是有限集合/有穷集合，iff 存在自然数n，使得S的基数为n（S与n等势）
  - **证明：** 自然数集ℕ是无穷集

反设ℕ有穷，从而存在n以及双射函数$f: n \to \mathbb{N}$，令

$\boldsymbol{m = f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1) + 1}$，从而有$\forall x \in n, f(x) \neq m$，故$f$非满射，矛盾！故ℕ为无穷集．□

有限集与无限集（2）

- S不是有限集合(是无限集/无穷集)，iff 存在S的真子集S'，使得S与S'等势

$\Rightarrow$ S一定包含一个与自然数集合等势的子集M = $\{a_0,a_1,a_2,\ldots\}$

令S'=S-$\{a_0\}$，可以定义f:S→S'如下：

对于任意$a_i \in$M, $f(a_i)= a_{i+1}$； 对于任意$x \in$S-M, $f(x)= x$.

显然这是双射，即S与其真子集S'等势。

$\Leftarrow$ 假设S是有限集，令$|S|=n$, 则对S的任意真子集S', 若$|S'|=m$，必有$m<n$, 因此从S'到S的任一单射不可能是满射。

本节提要

问题1：什么是集合的基数?

- 有限集合的基数就是一个自然数，表示集合的元素个数
- 无限集合中最小的那一个就是自然数集合，它的基数是$\aleph_0$
- 我们也可以判断一个集合是有限还是无限

问题2：(基数)最大的集合有多大?

问题3：如何比较两个(无限)集合的大小?

与自然数集等势的集合

- 平方数集与自然数集等势
- 整数集(包括负数)与自然数集等势

0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, ……

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ……

$$g(n)=\begin{cases} 2n & n>=0 \\ -2n-1 & n<0 \end{cases}$$

- 偶数集？ 奇数集？ 有理数集？ ~~实数集~~？
  - 若集合A与自然数集合N等势，则**card A = $\aleph_0$**
  - 若集合A与实数集合R等势，则**card A = $\aleph$**

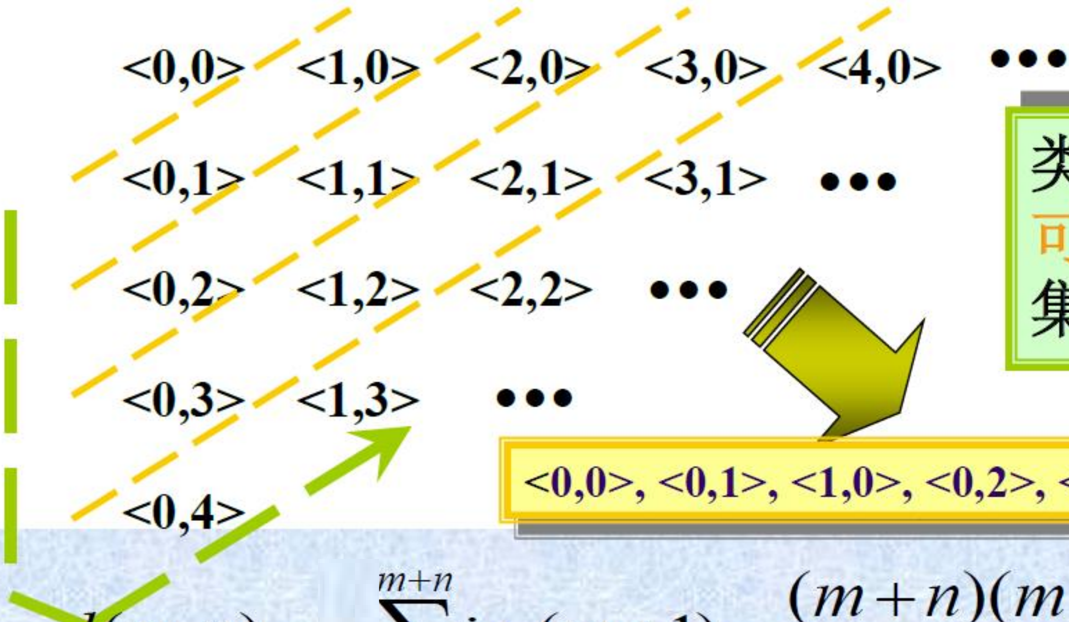
可数集（可列集）

- 如果存在从A到自然数集合N的单射，则称A为可数集/可列集（card A $\leq \aleph_0$）
  - 有限集均是可数集；无限集可分为可数集和不可数集
  - 与自然数集等势的集合称为无限可数集
  - 可数的直观含义：集合的元素可以按确定的顺序线性排列，所谓“确定的”顺序是指对序列中任一元素，可以说出它的“前”、“后”元素是什么

如果能证明实数集R不可数，则说明R的基数$\aleph$比$\aleph_0$大

自然数集的笛卡儿积是可列集

- 所有的自然数对构成的集合与自然数集等势



类似的图形显示：
可列个可列集的并集仍然是可列集合

<0,0>, <0,1>, <1,0>, <0,2>, <1,1>, <2,0>, <0,3>, ...

$$l(m,n)=\sum_{i=1}^{m+n} i+(m+1)=\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}+(m+1)$$

实数集不是可列集

- (0,1)不是可列集 //(0,1)与实数集合等势
  - "对角线证明法"

    假设(0,1)中的元素可以线性排列：

    $0.b_{11}b_{12}b_{13}b_{14}\ldots$

    $0.b_{21}b_{22}b_{23}b_{24}\ldots$

    $0.b_{31}b_{32}b_{33}b_{34}\ldots$

    $0.b_{41}b_{42}b_{43}b_{44}\ldots$

    $\vdots$

    则$0.\ b_1b_2b_3b_4\ldots$（$b_i \neq b_{ii}$）不含在上述序列中
- 显然存在N到R的单射，于是R的势大于N的势

幂集的基数

- 实数集是最大的集合么？那么实数的幂集呢？

- 证明：对任意集合A，A≉P(A)

  反设A与P(A)等势，即存在双射函数f: A→P(A)。

  构造集合$\mathrm{B} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} | \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\}$。

  即，$\mathrm{B} \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$是A的子集，且B中元素满足$\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$。

  下证B一定不在f的值域中，若成立则f非满射，矛盾。

  反设B在f的值域中，则存在$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$满足B=$f(\boldsymbol{a})$。

  此时，$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{B}$等价于$\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$等价于$\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{B}$，矛盾。

- 显然存在A到P(A)的单射，于是P(A)的势大于A的势

Contor定理

- **Cantor 定理（1891）：**

(1) $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$

(2) 对于任意集合A，$\boldsymbol{A} \not\approx \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$

P(N)与R哪个更大?

本节提要

问题1：什么是集合的基数?

- 有限集合的基数就是一个自然数，表示集合的元素个数
- 无限集合中最小的那一个就是自然数集合，它的基数是$\aleph_0$
- 我们也可以判断一个集合是有限还是无限

问题2：(基数)最大的集合有多大?

- 实数集比自然数集大
- 任意集合的幂集比自身大

问题3：如何比较两个(无限)集合的大小?

利用双射证明无限集等势

- (0,1)与整个实数集等势
  - 双射：$f:(0,1)\to R: f(x)=\mathrm{tg}(\pi x-\frac{\pi}{2})$
- 对任意不相等的实数a,b($a<b$), [0,1]与[a,b]等势
  - 双射：$f:[0,1]\to[a,b]: f(x)=(b-a)x+a$

    (这实际上意味着：任意长的线段与任意短的线段等势)

- 除此以外，还可以通过Bernstein定理证明等势

集合的优势关系

- 如果存在从集合A到集合B的单射，则称“集合B优势于集合A”，记为 A≼•B

  [card A $\leq$ card B]

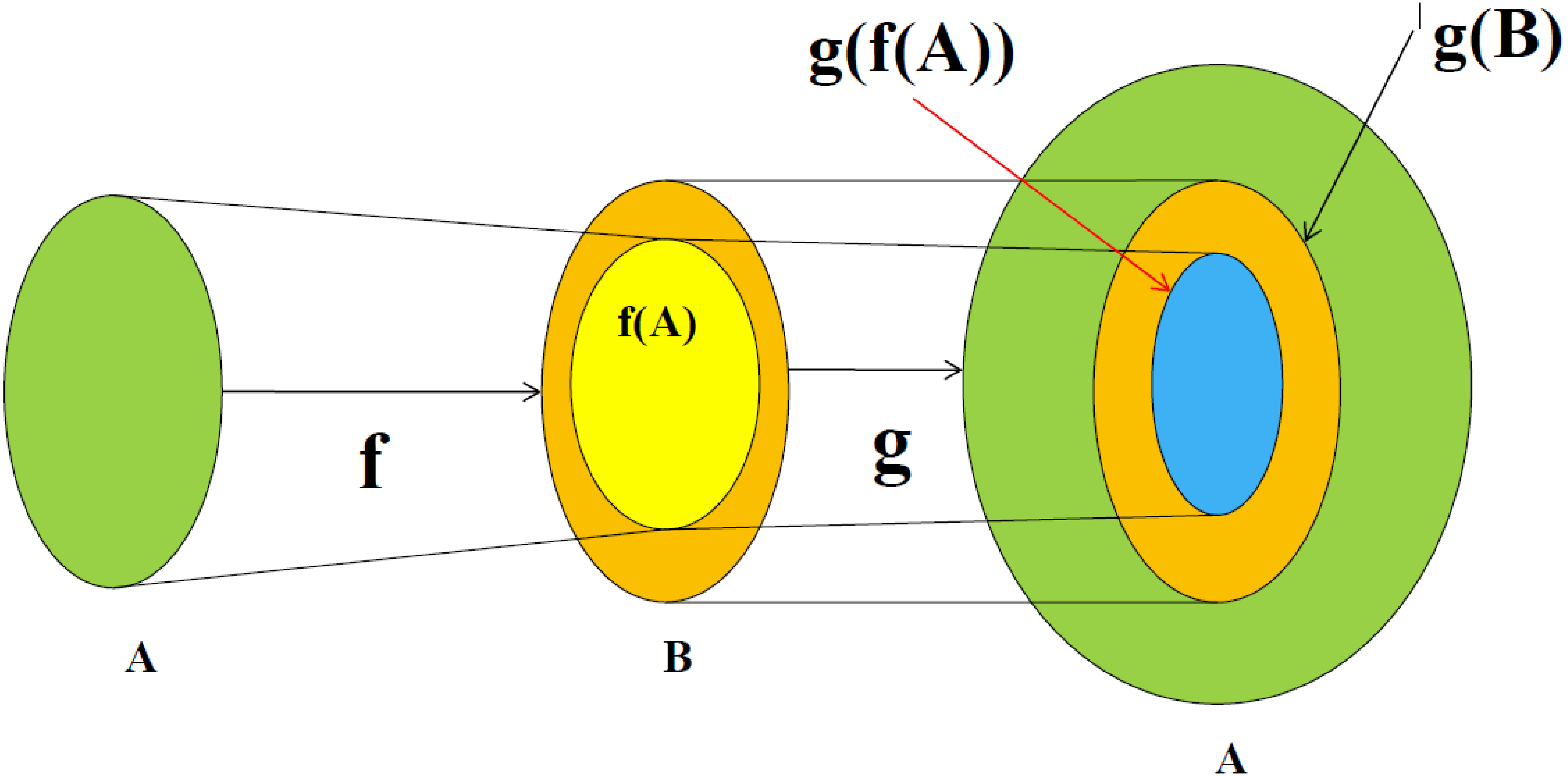
- 如果集合B优势于集合A，且B与A不等势，则称“集合B真优势于集合A”，记为A≺•B

  [card A $<$ card B]

- 实数集合真优势于自然数集
- 例子：对任意集合A，A的幂集真优势于集合A

Bernstein定理的证明

- 若A≼•B，且B≼•A，则A≈B。
- 由A≼•B可知,存在从A到B的一对一函数f，同样，由B≼•A可知，存在从B到A的一对一函数g，于是：$g \circ f$是从A到A的一对一函数。
- 显然，$g(f(A)) \subseteq g(B) \subseteq A$, 且$f$, g的一对一性质保证了：$g(f(A)) \approx A$, $g(B) \approx B$。
- “三明治”引理可推出：A≈ g(B), 从而A≈B。



$$g(f(A)) \subseteq g(B) \subseteq A$$

$$g(f(A)) \approx A,\ g(B) \approx B$$

用Bernstein定理证明等势

- 证明实数集的两个子集(0,1)和[0,1]等势
  - 直接找双射不太容易

关键是如何安排在[0,1]中但不在(0,1)中的0和1。回想关于无限集合充要条件的证明，我们可以取(0,1)的一个与自然数集合等势的子集(一定有)$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$，“腾出”前两个位置安排0和1

一种证法：
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2} & x=0 \\ \dfrac{1}{2^2} & x=1 \\ \dfrac{1}{2^{n+2}} & x=\dfrac{1}{2^n},\ n=1,2,3\ldots \\ x & x\text{为其它值} \end{cases}$$

用Bernstein定理证明等势

- 证明实数集的两个子集(0,1)和[0,1]等势
  - 分别找两个一对一的映射往往比找一个双射容易

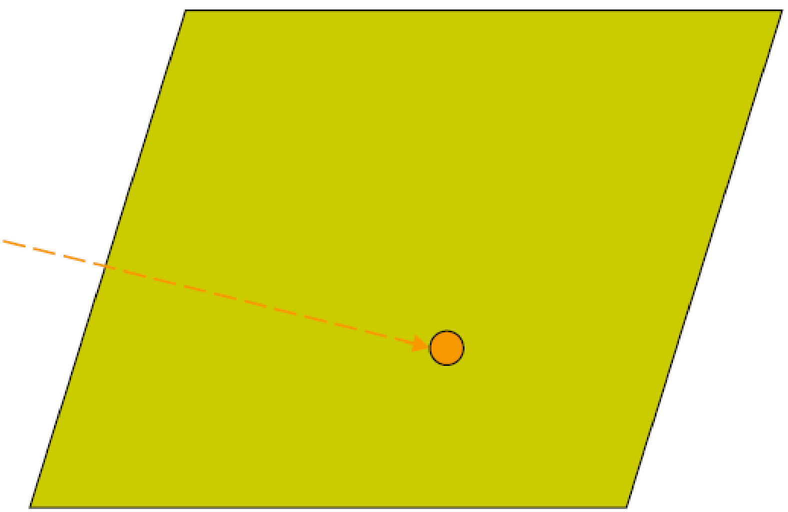
$$f:(0,1)\to[0,1]: f(x)=x$$

$$g:[0,1]\to(0,1): g(x)=\frac{1}{2}+\frac{x}{4} \quad \text{注意}: g([0,1])=[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$$

用Bernstein定理证明等势

- 直线上的点集与平面上的点集等势

$$\begin{cases} 0.a_1a_2a_3\ldots\ldots \\ 0.b_1b_2b_3\ldots\ldots \end{cases}$$



$$0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots\ldots$$

这实际上意味着直线上的点与任意有限维空间的点“一样多”！

关于B^A

- B^A是由定义域为A且伴域是B的函数组成的集合
- 若B={0,1}, A={a,b,c}, 则 B^A 是有8个元素的集合:

$\{<a,0>,<b,0>,<c,0>\}$ $\{<a,1>,<b,0>,<c,0>\}$

$\{<a,0>,<b,0>,<c,1>\}$ $\{<a,1>,<b,0>,<c,1>\}$

$\{<a,0>,<b,1>,<c,0>\}$ $\{<a,1>,<b,1>,<c,0>\}$

$\{<a,0>,<b,1>,<c,1>\}$ $\{<a,1>,<b,1>,<c,1>\}$

- $\{0,1\}^N$? $\{0,1\}^N \approx$ P(N)

用Bernstein定理证明等势

- 实数集与ρ(N)等势
  - $[0, 1) \approx \{0, 1\}^{N}$ 从而 $R \approx \rho(N)$
    - [0,1)中的数唯一地表示为$0.b_1b_2b_3b_4\ldots$ （二进制表示）
      不容许连续无数个1，比如1/2=0. 1000… (NOT 0.0111…)
    - $f : [0, 1) \to \{0, 1\}^{N}$
      $0.b_1b_2b_3b_4\ldots \to b_1, b_2, b_3, b_4\ldots$
      f是单射
    - $g : \{0, 1\}^{N} \to [0, 1)$
      $b_1, b_2, b_3, b_4\ldots \to 0.b_1b_2b_3b_4\ldots$ //看做十进制数
      g是单射
    - 根据Bernstein定理，得证

重要的等势、优势关系

- $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q} \approx \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$
- $\mathbb{R} \approx [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \approx (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) \approx \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^{\mathbb{N}} \approx \boldsymbol{P}(\mathbb{N}) \approx (\mathbf{0}, \mathbf{1})$
- $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^{A} \approx \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$
- $\mathbb{N} \prec\cdot\ \mathbb{R}$
- $\boldsymbol{A} \prec\cdot\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) \prec\cdot\ \boldsymbol{PP}(\boldsymbol{A}) \prec\cdot \cdots$

连续统假设

Continuum hypothesis，简称CH

不存在集合S：

$$\aleph_0 < \text{card } S < \aleph$$

不存在一个基数绝对大于可数集而绝对小于实数集的集合。

库尔特·哥德尔在1940年证明了CH与ZFC的相对协调性（无法以ZFC证明为误），保罗·柯恩在1963年证明了连续统假设不能由ZFC推导。也就是说连续统假设独立于ZFC。

本节小结

问题1：什么是集合的基数?

- 有限集合的基数就是一个自然数，表示集合的元素个数
- 无限集合中最小的那一个就是自然数集合，它的基数是$\aleph_0$
- 我们也可以判断一个集合是有限还是无限

问题2：(基数)最大的集合有多大?

- 实数集比自然数集大
- 任意集合的幂集比自身大

问题3：如何比较两个(无限)集合的大小?

- 利用双射函数证明等势
- 利用Bernstein定理证明等势

作业

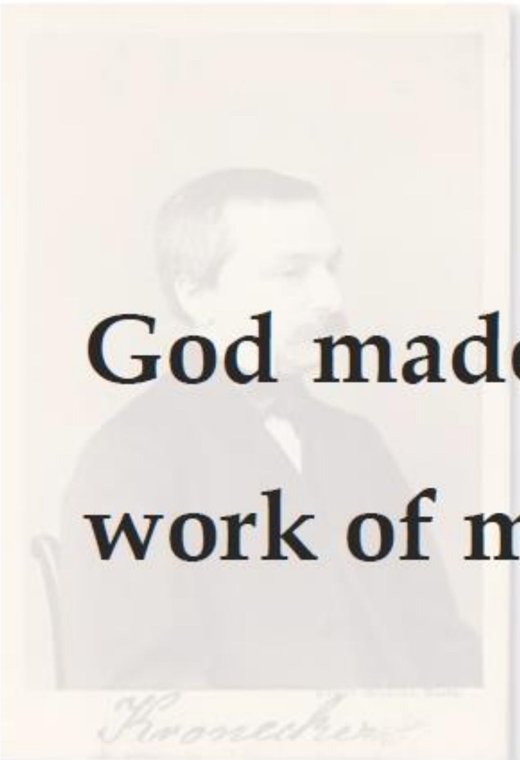
- 见课程网站

集合优势关系的性质

- 自反性：恒等函数
- 若A≼•B，且B≼•A，则A≈B (比较:反对称性)
  (Cantor-Bernstein定理)
- 传递性：单射的复合仍然是单射

等势关系是等价关系

- 自反性：I_A:A→A
- 对称性：如果f:A→B是双射，则f的反函数f^{-1}:B→A，也是双射。
- 传递性：如果f:A→B，g:B→C均是双射，则 $g \circ f$是从A到C的双射。
- 例子
  - 与自然数集等势的所有集合构成一个等价类。



God made the integers; all else is the work of man.

—— Leopold Kronecker