

数论基础

回顾

2

问题1：什么是集合的基数？

- 有限集合的基数就是一个自然数，表示集合的元素个数
- 无限集合中最小的那一个就是自然数集合，它的基数是 \aleph_0
- 我们也可以判断一个集合是有限还是无限

问题2：(基数)最大的集合有多大？

- 实数集比自然数集大
- 任意集合的幂集比自身大

问题3：如何比较两个(无限)集合的基数？

- 利用双射函数证明等势
- 利用**Bernstein**定理证明等势

本节提要

3

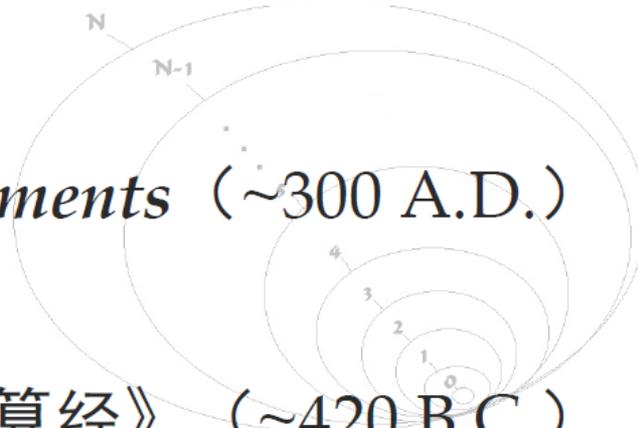
问题1：什么是(初等)数论？

问题2：素数有哪些性质？

现代数论的早期铺垫

4

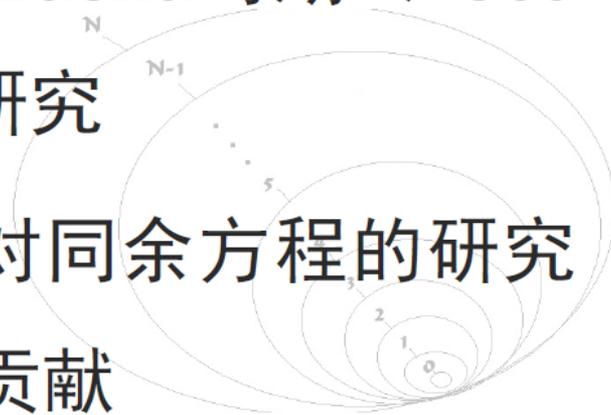
- 证明质数无穷
——Euclid: *Elements* (~300 A.D.)
- 筛法寻找质数
—— Eratosthenes (~250 A.D.)
- 辗转相除法求最大公约数
——Euclid: *Elements* (~300 A.D.)
- 求解同余方程的中国剩余定理
——《孙子算经》 (~420 B.C.)



什么是数论

5

- 数论是纯数学的一个分支，也是纯数学的代表，它主要研究**整数**的性质
- 数论的早期研究可追溯至Euclid时期（~300 B.C.）：对质数和整除的研究
- 中国古代（~400 A.D.）对同余方程的研究为现代数论作出了基础性贡献



整数集

- 整数集一般记为 \mathbb{Z} （来源于德语“数”：*Zahlen* 的首字母），同时用 \mathbb{Z}^+ 表示正整数集（ $\mathbb{N} - \{0\}$ ），用 \mathbb{Z}^- 表示负整数集（ $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ ）
- \mathbb{Z} 为可列集： $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$ ，基数为 \aleph_0
- \mathbb{Z} 是全序集（未来课程详述），无上界和下界
- \mathbb{Z} 和加法运算形成一个循环群（未来课程详述）；和加法运算及乘法运算形成一个环（参见抽象代数资料*）

整数的代数性质

	Addition	multiplication
Closure Property	$a + b = \text{an integer}$ example $6 + 2 = 8$	$ax b = \text{an integer}$ example $3 \times 4 = 12$
Associative	$a + (b + c) = (a + b) + c$ example $9 + (2 + 4) = (9 + 2) + 4 = 15$	$ax(b \times c) = (ax b) \times c$ example $3 \times [-2] \times 4 = [3 \times (-2)] \times 4 = -24$
Distributive	$ax(b + c) = (ax b) + (a \times c), \quad (a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ example $5 \times [2 + (-3)] = [5 \times 2] + [5 \times (-3)] = 10 - 15 = -5$	
Commutative	$a + b = b + a$ example $3 + (-2) = (-2) + 3 = 1$	$ax b = b \times a$ example $3 \times (-2) = (-2) \times 3 = -6$
Identity	$a + 0 = a$ example $6 + 0 = 6$	$ax 1 = a$ example $(-6) \times 1 = -6$
Inverse element	$a + (-a) = 0$ example $6 + (-6) = 0$	No inverse element
Zero product property		If $a \times b = 0$, then either $a = 0$, or $b = 0$ or both = 0

整除

- 对任意整数 a 和 b , $a \neq 0$, 我们说 a 整除 b (记作 $a|b$), 如果存在整数 c 使得 $b = a c$.
- 设 a, b 和 c 是整数, $a \neq 0$,
 - 若 $a|b$, 且 $a|c$, 则 $a|(b+c)$
 - 若 $a|b$, 则 $a|(b c)$
 - 若 $a|b$, 且 $b|c$, 则 $a|c$

余数

- 余数 (remainder) 来源于带余除法
- 定义 (带余除法) : 令 $a \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z}^+$, 则:
 $(\exists! q, r \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq r < d)(a = d \times q + r)$
 - 其中, a 称为被除数 (dividend), d 称为除数 (divisor), q 称为商 (quotient), r 称为余数
 - 记: $q = a \operatorname{div} d$, $r = a \operatorname{mod} d$, 后者读作 “ a 模 b ”
- 例: $\because -11 = 3 \times (-4) + 1, \therefore -11 \operatorname{mod} 3 = 1$

同余算术 (高斯, Gauss)

- 设 a 和 b 为整数, m 为正整数, 如果 m 整除 $(b-a)$, 就说 a 模 m 同余 b . 记作 $a \equiv b \pmod{m}$.
- $a \equiv b \pmod{m}$ iff $a \pmod{m} = b \pmod{m}$
- $a \equiv b \pmod{m}$ iff $\exists k \in \mathbb{Z}. a = b + km$
- 举例 $-1 \equiv 5 \pmod{6}$, $-2 \equiv 4 \pmod{6}$, ..., $-5 \equiv 1 \pmod{6}$
 - $[0] = \{\dots, -6, 0, 6, \dots\}$
 - $[1] = \{\dots, -5, 1, 7, \dots\}$
 - $[2] = \{\dots, -4, 2, 8, \dots\}$
 - ...

同余算术

- 令 a 和 b 为整数， d 为正整数，则
 - $(a + b) \bmod d = (a \bmod d + b \bmod d) \bmod d.$
 - $(a \cdot b) \bmod d = ((a \bmod d) \cdot (b \bmod d)) \bmod d.$
- 模 m 算术：令 Z_m 表示小于 m 的非负整数集合，定义 $+_m / \cdot_m$ 为模 m 加法/乘法
 - $a +_m b = (a + b) \bmod m$
 - $a \cdot_m b = (a \cdot b) \bmod m$

本节提要

12

问题1：什么是(初等)数论？

- 研究整数的性质：整除、余数、同余算术

问题2：素数有哪些性质？

素数 (Prime)

- 大于1的正整数 p 称为素数，如果 p 仅有的正因子是1和 p 。大于1又不是素数的正整数称为合数。
- 正整数 n 是合数 *iff* $\exists a \in \mathbb{N}. 1 < a < n, \text{ 且 } a / n$.
- 算术基本定理：每个大于1的正整数都可以唯一地写为一个素数或者若干个素数的乘积，其中素数因子以非递减序出现。
 - $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$
- 素数举例：2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...
- 合数举例：100 = 2² 5². 999 = 3³ 37, 1024 = 2¹⁰ .

算术基本定理的证明(存在性)

- 大于1的自然数必可写成素数之积
- 用反证法：
 - 假设存在大于1的自然数不能写成质数的乘积，把最小的那个称为 n 。
 - 大于1的自然数可以根据其可除性（是否能表示成两个不是自身的自然数的乘积）分成2类：质数、合数。
 - 首先，按照定义， n 不是质数，因为质数 p 可以写成质数乘积： $p=p$ ，这与假设不相符合。
 - 因此 n 只能是合数，但每个合数都可以分解成两个严格小于自身而大于1的自然数的积。设 $n = a * b$ ，其中 a 和 b 都是介于1和 n 之间的自然数，因此，按照 n 的定义， a 和 b 都可以写成质数的乘积。从而 $n = a * b$ 也可以写成质数的乘积。由此产生矛盾。

算术基本定理的证明(唯一性)

15

□ 引理：若质数 $p \mid ab$ ，则不是 $p \mid a$ ，就是 $p \mid b$ 。

证明：

(1) 若 $p \mid a$ 则证明完毕。

(2) 若非 $p \mid a$ ，那么两者的最大公约数为 1。根据裴蜀(Bézout)定理，存在 (m, n) 使得 $ma + np = 1$ 。于是 $b = b(ma + np) = abm + bnp$ 。由于 $p \mid ab$ ，上式右边两项都可以被 p 整除。所以 $p \mid b$ 。

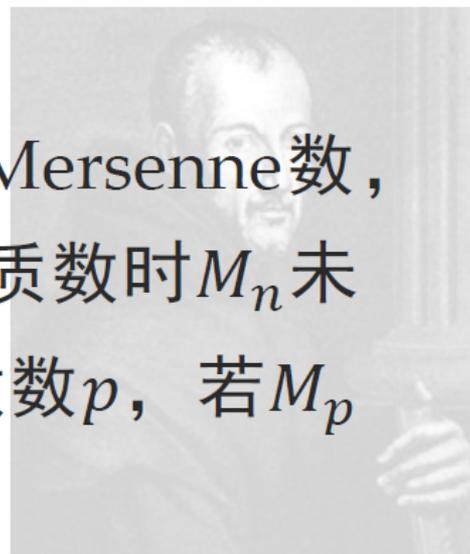
算术基本定理的证明(唯一性)

- 再用反证法：
 - 假设有些大于1的自然数可以以多于一种的方式写成多个质数的乘积，那么假设 n 是其中最小的一个。
 - 首先 n 不是质数。将 n 用两种方法写出：
 - $n = p_1 * p_2 * p_3 * \dots * p_r$
 - $n = q_1 * q_2 * q_3 * \dots * q_s$
 - 根据引理，质数 $p_1 \mid q_1 * q_2 * q_3 * \dots * q_s$ ，所以 q_i 中有一个能被 p_1 整除，不妨设为 q_1 。但 q_1 也是质数，因此 $q_1 = p_1$ 。
 - 所以，比 n 小的正整数 $n' = p_2 * p_3 * \dots * p_r$ 也可以写成 $q_2 * q_3 * \dots * q_s$ 。这与 n 的最小性矛盾！

梅森素数

17

- 关于质数的命题可追溯到Euclid时期，最著名的命题之一为《几何原本》所提之：**若 $2^p - 1$ 为质数**，则 $2^{p-1}(2^p - 1)$ 为**完全数**（本身为其所有真因子之和的数）
- 对 $n \in \mathbb{Z}^+$ ，整数 $M_n = 2^n - 1$ 被称为Mersenne数，当 n 为合数时 M_n 必为合数，但当 n 为质数时 M_n 未必——甚至极少——为质数。对某质数 p ，若 M_p 为质数，则称 M_p 为**Mersenne质数**



例： n 是合数，则 M_n 也是合数

18

若 n 不是质数,则存在大于1,小于 n 的两个正整数 a,b 满足 $n=ab$.

于是

$$2^{n-1}$$

$$=2^{(ab)-1}$$

$$=(2^a)^{b-1} \quad (\text{令 } y=2^a)$$

$$=y^{b-1}$$

$$=(y-1)(y^{(b-1)}+y^{(b-2)}+\dots+y+1)$$

梅森素数

- 前四个梅森素数 **M_2** 、 **M_3** 、 **M_5** 、 **M_7** 在公元前就已经知道
- 前**12**个梅森素数在手算时代发现
- **1952-1996**年发现了前**34**个梅森素数
- 往后的梅森素数都是由因特网梅森素数大搜索 (**GIMPS**) 分布式计算项目发现
- 目前，**2018年12月**发现第**51**个： **$M_{82589933}$**

埃拉托色尼筛选法(Eratosthenes, BC276–195)

- 用筛选法求质数 (以25以内的为例)

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

[2] 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

[3] 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

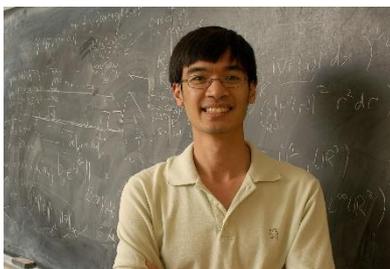
[5] 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

素数的性质

- 下列自然数哪些是素数？
 - 101
 - $2^2-1, 2^3-1, 2^5-1, \dots, 2^p-1, \dots$
 - $2^{11}-1=2047=23\cdot 89$ （大数的因数分解有点难）
 - （搜寻尽可能大的梅森素数）
- 如果 n 是合数，那么 n 必有不大于 \sqrt{n} 的一个素因子。
- 存在无限多个素数
 - 证明. 反证法，假设只有有限个素数， p_1, p_2, \dots, p_k
 - 令 $q=1+p_1p_2 \dots p_k$ ， q 的素因子是新的素数，矛盾。

素数的性质

- 任意给定 K ，存在 K 个成等差级数的素数(陶哲轩,格林,2004)
 - 举例：当 $K=3$ 时，我们有3, 7, 11。



- 任一大于2的偶数都可以写成2个素数之和?
 - $1+1$ (哥德巴赫猜想, 1742)
 - $1+2$ (陈景润证明, 1966)
- 素数的分布?
 - 无穷多个“特殊形式的素数”，比如：搜寻尽可能大的梅森素数。
 - 素数定理：不超过 n 的素数有多少个？接近于 $n / \ln n$ (n 充分大时)



张益唐与孪生素数猜想



生于1955-

庾信平生最萧瑟，
暮年诗赋动江关

2013: 存在无穷多个素数对相差都小于**7000万**

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (p_{n+1} - p_n) < 7 \times 10^7$$

最大公约数

- 能整除两个（正）整数的最大正整数称为这两个正整数的最大公约数。记法： $\gcd(a, b)$
 - ▣ $\gcd(a, b) = \max\{d \in \mathbb{N}^+ \mid d|a, d|b\}$, $a \neq 0$ 或者 $b \neq 0$
 - ▣ 我们称 a 和 b 是互素的，如果 $\gcd(a, b) = 1$
- 若 $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$,
则 $\gcd(a, b) = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_k^{\gamma_k}$, $\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$

最大公约数的性质

25

- 定理（线性合成）：设 $a, b \in \mathbb{Z}^+$ ，则：

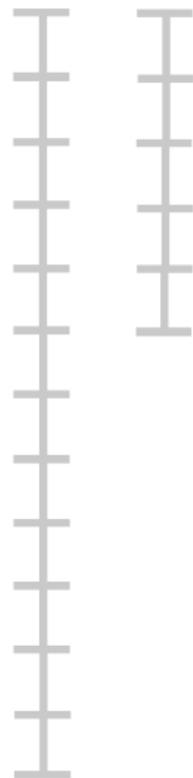
$$(\exists s, t \in \mathbb{Z})(\gcd(a, b) = sa + tb)$$

- 定理（辗转相减）：设 $a, b \in \mathbb{Z}^+, a < b$ ，则：

$$\gcd(a, b) = \gcd(a, b - a)$$

- 定理（辗转相除）：设 $a, b \in \mathbb{Z}^+, a > b$ ，则：

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$$



欧几里德算法（求最大公约数）

```
function gcd( $a, b$ ) //  $a > 0, b > 0$   
  while  $a \neq b$   
    if  $a > b$   
       $a := a - b$   
    else  
       $b := b - a$   
  return  $a$ 
```

```
function gcd( $a, b$ ) // 不全为0的自然数  
  while  $b \neq 0$   
     $t := b$   
     $b := a \bmod b$   
     $a := t$   
  return  $a$ 
```

```
function gcd( $a, b$ ) //  $a \geq b \geq 0, a > 0$   
  if  $b = 0$   
    return  $a$   
  else  
    return gcd( $b, a \bmod b$ )
```

最大公约数的性质 (续)

□ $\gcd(a, b)$ 一定是 a 和 b 的线性组合, 即:

$$\exists s, t \in \mathbf{Z}, \gcd(a, b) = sa + tb$$

- If d is $GCD(a, b)$, then $d = sa + tb$ for some integer s and t .
 - Let x be the **smallest positive integer** that can be written as $sa + tb$. For any common divisor c of a, b , $c|(sa + tb)$, which means that x is no less than any common divisor of a, b .
 - Let $a = qx + r$ ($0 \leq r < x$), then $r = a - q(sa + tb) = (1 - qs)a - qtb$. Since r is also of the form of $sa + tb$, r can not be positive, and must be 0. So, $a = qx$, that is, $x|a$. Similarly, $x|b$.
 - Conclusion: $x = sa + tb$ is the largest common divisor of a and b . And it is a multiple of any other common divisors.

最大公约数的性质 (续)

- $\gcd(a, b)$ 一定是 a 和 b 的线性组合, 即:

$$\exists s, t \in \mathbf{Z}, \gcd(a, b) = sa + tb$$

- 裴蜀(Bézout)定理: 非零整数 a 和 b 是互素的 *iff* $\exists s, t \in \mathbf{Z}. sa + tb = 1$

- 必要性显然。

- 以下证明其充分性。假设 $\exists s, t \in \mathbf{Z}. sa + tb = 1$ 。

- 假设 $\gcd(a, b) = d$, $\exists a_1, b_1 \in \mathbf{Z}. a = a_1d, b = b_1d$ 。

- 我们有 $sa_1d + tb_1d = 1$ 。即 $(sa_1 + tb_1)d = 1$ 。

- 因此 $d = 1$ 。即 $\gcd(a, b) = 1$ 。

例

29

If a , b , and c are positive integers such that $\gcd(a, b) = 1$ and $a \mid bc$, then $a \mid c$.

Proof: Because $\gcd(a, b) = 1$, by Bézout's theorem there are integers s and t such that

$$sa + tb = 1.$$

Multiplying both sides of this equation by c , we obtain

$$sac + tbc = c.$$

We can now use Theorem 1 of Section 4.1 to show that $a \mid c$. By part (ii) of that theorem, $a \mid tbc$. Because $a \mid sac$ and $a \mid tbc$, by part (i) of that theorem, we conclude that a divides $sac + tbc$. Because $sac + tbc = c$, we conclude that $a \mid c$, completing the proof. 

If p is a prime and $p \mid a_1 a_2 \cdots a_n$, where each a_i is an integer, then $p \mid a_i$ for some i .

中国剩余定理（孙子算经，5世纪）

$$(S): \begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？
答曰：‘二十三’。

- 假设正整数 m_1, m_2, \dots, m_n 两两互素，一元线性同余方程组 (S) 有解，在模M同余下是唯一的。

$$M = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n = \prod_{i=1}^n m_i \quad M_i = M/m_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$t_i M_i \equiv 1 \pmod{m_i}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

$$x = \sum_{i=1}^n a_i t_i M_i.$$

中国剩余定理（孙子算经，5世纪）

$$(S) : \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

$$70 = 2 \times 35 \equiv \begin{cases} 1 \pmod{3} \\ 0 \pmod{5} \\ 0 \pmod{7} \end{cases}, \quad 21 = 1 \times 21 \equiv \begin{cases} 0 \pmod{3} \\ 1 \pmod{5} \\ 0 \pmod{7} \end{cases}, \quad 15 = 1 \times 15 \equiv \begin{cases} 0 \pmod{3} \\ 0 \pmod{5} \\ 1 \pmod{7} \end{cases}$$

$$2 \times 70 + 3 \times 21 + 2 \times 15 \equiv \begin{cases} 2 \times 1 + 3 \times 0 + 2 \times 0 \equiv 2 \pmod{3} \\ 2 \times 0 + 3 \times 1 + 2 \times 0 \equiv 3 \pmod{5} \\ 2 \times 0 + 3 \times 0 + 2 \times 1 \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

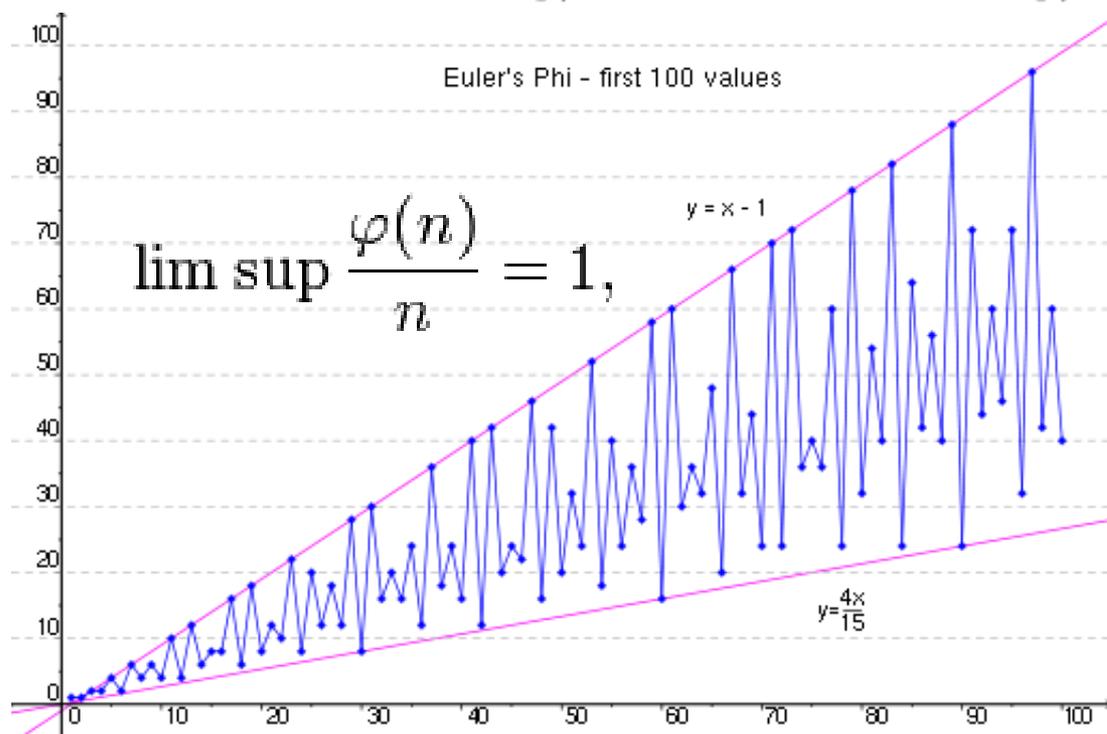
$$x = 233 + k \times 105, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

欧拉函数(ϕ 函数)

- 不大于 n 且与 n 互质的正整数的个数，记为 $\phi(n)$ 。
- $\phi(n) = |\{ k \mid 1 \leq k \leq n, \gcd(k, n) = 1 \}|, n \in \mathbf{N}^+$
 - $\phi(3) = 2, \phi(4) = 2, \phi(12) = 4$
- 设 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$
- 令 $A_i = \{ x \mid 1 \leq x \leq n, p_i \text{整除} x \}$
- $$\begin{aligned} \phi(n) &= | \sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \dots \cap \sim A_k | \\ &= n - (n/p_1 + \dots + n/p_k) + (n/p_1 p_2 + \dots + n/p_{k-1} p_k) \\ &\quad - \dots + (-1)^k n/p_1 p_2 \dots p_k \\ &= n(1 - 1/p_1) (1 - 1/p_2) \dots (1 - 1/p_k) \end{aligned}$$

欧拉函数

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^r p_i^{k_i-1} (p_i - 1) = \prod_{p|n} p^{\alpha_p-1} (p - 1) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$



$$\liminf \frac{\varphi(n)}{n} \log \log n = e^{-\gamma}. \quad \text{欧拉常数 } \gamma = 0.577215665\dots$$

欧拉函数的性质

- $\phi(p)=p-1$, p 是素数
- 如果 m 与 n 互素, 则 $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.
- $\phi(mn)=\phi(m)\phi(n) \cdot d/\phi(d)$, 其中 $d=\gcd(m,n)$

$$\phi(mn) = mn \prod_{p|mn} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = mn \frac{\prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}{\prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p}\right)} = \phi(m)\phi(n) \frac{d}{\phi(d)}$$

欧拉定理

- **定理 (Euler定理)** : 对 $a, n \in \mathbb{Z}^+$, 若 $(a, n) = 1$, 则:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

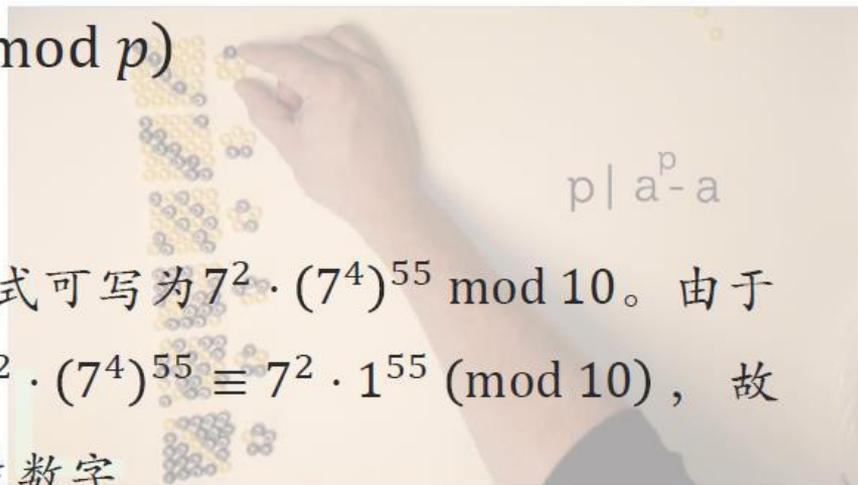
- 若上述 $n \in \mathbb{Z}^+$ 为质数, 由欧拉函数的性质易得到:

- **定理 (Fermat小定理)** : 设正整数 a 不是质数 p 之倍数, 则:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

- **例:** 求 7^{222} 的个位数字

- **解:** 待求即为 $7^{222} \pmod{10}$, 上式可写为 $7^2 \cdot (7^4)^{55} \pmod{10}$ 。由于 $(7, 10) = 1$, 由 Euler 定理, $7^2 \cdot (7^4)^{55} \equiv 7^2 \cdot 1^{55} \pmod{10}$, 故 $7^{222} \pmod{10} = 9$ 即为 7^{222} 之个位数字



RSA的数学基础*

- 若 a 与 n 互质, 则 $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$,
 - ▣ 若 $\alpha \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$, 则 $a^\alpha \equiv a \pmod{n}$
- 若 $n=pq$, $\alpha \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$, $0 < m < n$, 则 $m^\alpha \equiv m \pmod{n}$
- 选取大质素 $p, q: n=pq$ (n 难以分解成质素乘积) .
- 令 $k = \varphi(n)$ (n 不知道 n 的质因子, k 难以求出) .
- 设 e 为公钥, d 为私钥, 满足 $ed \equiv 1 \pmod{k}$.
- 加密: $S = m^e \pmod{n}$.
- 解密: $t = S^d \pmod{n}$. ($t = m$, why?)

RSA的数学基础*

37

- 根据加密S可以写成 $S = m^e - kn$ ，带入解密，即证 $(m^e - kn)^d \equiv m \pmod{n}$
- 由 $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$ ，有 $ed = h\varphi(n) + 1$ ，再代入上式得 $m^{h\varphi(n)+1} \equiv m \pmod{n}$
- 1- 若m与n互质就是欧拉定理
- 2- 若m与n不互质，不妨设 $m=kp$ 。（m只能是kp或者kq）
 - 根据欧拉定理有 $(kp)^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ （k与q互质）
 - $\Rightarrow [(kp)^{q-1}]^{h(p-1)} \times kp \equiv kp \pmod{q}$
 - $\Rightarrow (kp)^{ed} \equiv kp \pmod{q}$ （根据 $ed = h\varphi(n) + 1 = h(p-1)(q-1) + 1$ ）
 - $\Rightarrow (kp)^{ed} = tq + kp$ （于是有：t必能被p整除， $t=t'p$ ）
 - $\Rightarrow (kp)^{ed} = t'pq + kp$ （ $m=kp$ ， $n=pq$ ）
 - $\Rightarrow m^{ed} \equiv m \pmod{n}$

本节小结

38

问题1：什么是(初等)数论？

- 研究整数的性质：整除、余数、同余算术

问题2：素数有哪些性质？

- 素数基本定理
- 最大公约数
- 中国剩余定理/同余方程
- 欧拉定理/费马小定理

作业

- 见课程网站