计数

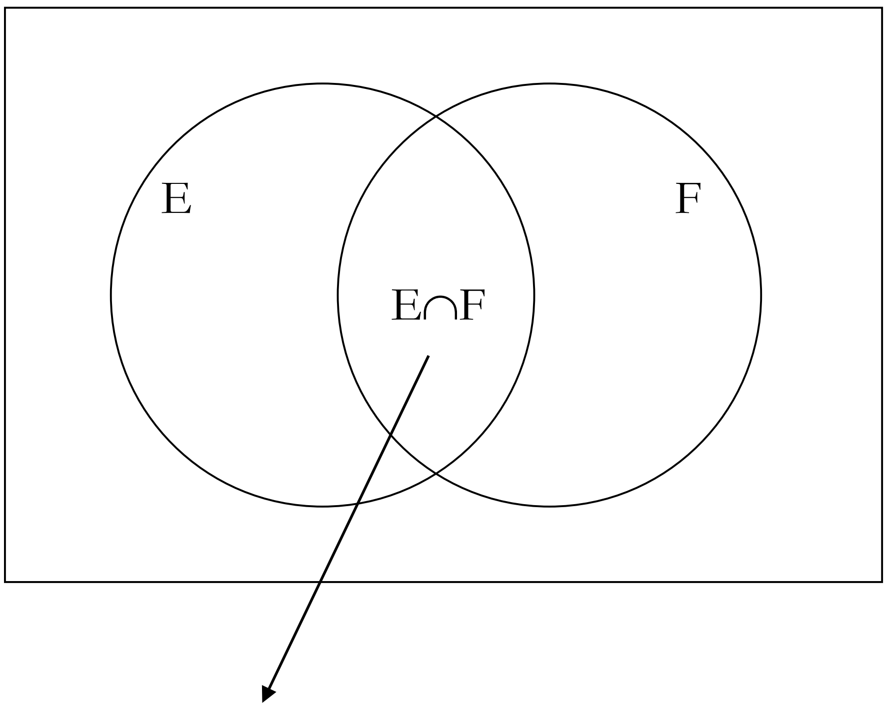
回顾

- 归纳：
  - 数学归纳法与强数学归纳法
  - 运用良序公理来证明
- 递归：
  - 递归定义
  - 结构归纳法与递归算法

本节提要

- 内容1：容斥原理
- 内容2：鸽笼原理
- 内容3：排列与组合

两个有限集合并集的计数



既学英语，又学法语的同学

已知某个班级学英语的50人，学法语的30人，分别记为：

$$|E| = 50;\ |F| = 30$$

问这个班级一共多少人?

显然，只要$E \cap F \neq \phi$，班级人数就并非80人。

$$|E \cup F| = (|E| + |F|) - |E \cap F|$$

数字排列的例子

- 将0,1,2,...,9排成一列，要求第1个数字大于1，最后一个数字小于8，共有多少种排法?
  - 这10个数字所有的排法构成全集U, $|U|=10!$
  - 第1个数字不大于1的排法构成子集A(即所有以0或者1开头的排法), $|A|=2\cdot 9!$
  - 最后一个数字不小于8的排法构成子集B(即所有以8或者9结束的排法), $|B|=2\cdot 9!$
  - $|A\cap B|=2\cdot 2\cdot 8!$
  - 题目要求的排法构成子集$(\sim A\cap \sim B)$
  - $|(\sim A\cap \sim B)| = |U| - |A\cup B| = |U| - |A| - |B| + |A\cap B| = 10! - 4\cdot 9! + 4\cdot 8! = 2{,}338{,}560$

三个有限集合并集的计数

- 假设定义全集的三个子集A,B,C。则：

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

证明：

$$|A\cup B\cup C| = |A\cup B|+|C|-|(A\cup B)\cap C|$$

$$= |A|+|B|-|A\cap B|+|C|-|(A\cap C)\cup(B\cap C)|$$

$$= |A|+|B|-|A\cap B|+|C| - |(A\cap C)|-|(B\cap C)|+|(A\cap B\cap C)|$$

$$= |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

选课的例子

- 全班共有160个学生
  - 选数学课64人，选计算机课94人，选金融课58人
  - 选数学与金融的28人，选数学与计算机的26人，选计算机与金融的22人
  - 三种课全选的14人。
- 问：这三种课都没选的是多少？只选一门计算机的有多少？

选课的例子

- M-数学、C-计算机、F-金融
- 容斥原理

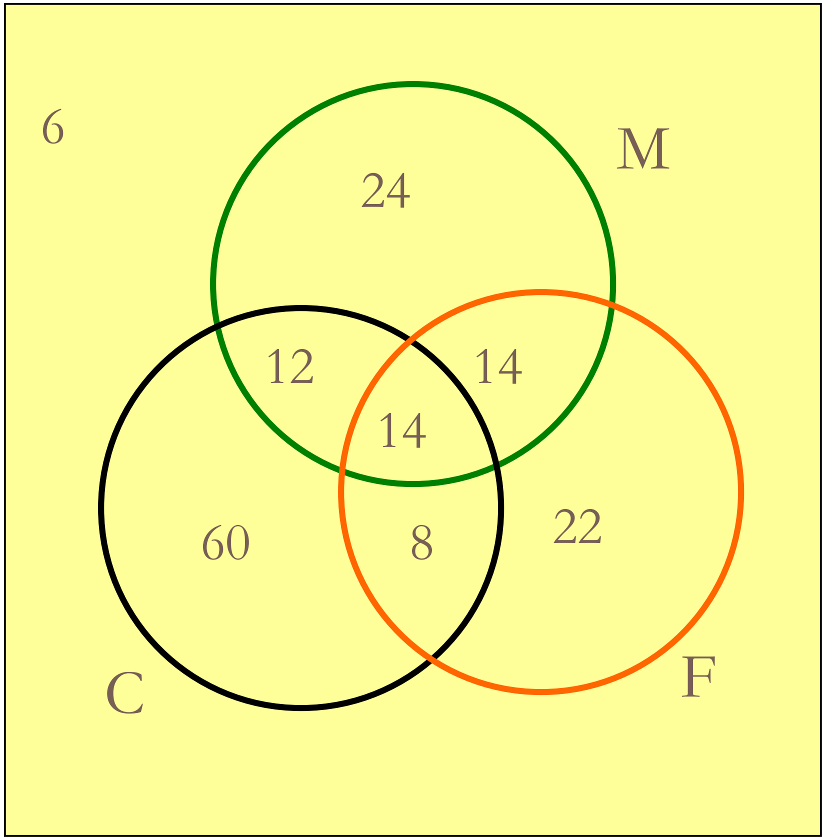
$|M \cup C \cup F| = |M| + |C| + |F| - |M \cap F| - |M \cap C| - |C \cap F| + |M \cap C \cap F|$

$= 64+94+58-28-26-22+14$

$= 154$

因此，6人未选课。

只选了计算机课的60人



容斥原理
(Principle of Inclusion and Exclusion)

假设$A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个有限集合，则它们的并集的元素个数是：

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots + (-1)^{k-1} S_k + \ldots + (-1)^{n-1} S_n$$

其中，$S_k = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| \quad k = 1, 2, \ldots, n$

例如：4个子集的公式为：

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|$$

$$-(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|)$$

$$+(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|)$$

$$-|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

容斥原理的证明

- 公式：$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots + (-1)^{k-1} S_k + \ldots + (-1)^{n-1} S_n$
- 我们证明并集中的元素在右边式子中恰好被计数1次
  - 设并集中对象a出现在m个集合A_i中
  - 则它在在S_1中被计数m 次，在S_2中被计数 C_2^m 次
    - 以n=4，m=3为例 (假设*a*出现在$\mathbf{A_1}$,$\mathbf{A_2}$和$\mathbf{A_3}$中)：

S_1 ： $|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|$

S_2 ： $-(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|)$

S_3 ： $+(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|)$

S_4 ： $-|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$

容斥原理的证明

- 公式：$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots + (-1)^{k-1} S_k + \ldots + (-1)^{n-1} S_n$
- 我们证明并集中的元素在右边式子中恰好被计数1次
  - 设并集中对象a出现在m个集合A_i中
  - 则它在在S_1中被计数m 次，在S_k中被计数 C_k^m 次
  - 将上述分析带入计数公式可得a在右式中计数次数：

    $$C_1^m - C_2^m + \ldots + (-1)^{k-1} C_k^m + \ldots + (-1)^{m-1} C_m^m$$

    - 该计算式值为1，因为当x=1时下式为0:

      $$(1-x)^m = 1 - C_1^m x + C_2^m x^2 + \ldots + (-1)^k C_k^m x^k + \ldots + (-1)^m C_m^m x^m$$

  - a恰好被计数1次

例：100以内有多少质数

- 100以内的任意合数必有不大于其平方根的质数为其因子。这样的质数只有4个：{2, 3, 5, 7}
- 设A_2, A_3, A_5, A_7 分别是可被相应质数整除的100以内大于1的自然数的集合。则100以内质数的数量为：

$$N(\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_5}\,\overline{A_7}) = 99 - \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor$$

$$+ \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3\cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3\cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5\cdot 7} \right\rfloor$$

why?

$$- \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3\cdot 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3\cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 5\cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3\cdot 5\cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7} \right\rfloor + \underline{4}$$

$$= 99 - 50 - 33 - 20 - 14 + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 - 3 - 2 - 1 - 0 + 0 + 4$$

$$= 25$$

例：粗心的衣帽间管理员

- 剧场的衣帽管理间新来了一个粗心的管理员,他忘了给每个客人的帽子夹上号码牌。散场时他只好随意地将帽子发还给客人。没有任何人拿到自己的帽子的概率是多少?
- 这可以看作一个排列问题：对标号为$1,2,3,\cdots,n$的n个帽子重新排列，新的序号为$i_1, i_2, i_3,\cdots,i_n$。上述问题即：满足对任意k $(1\le k\le n)$, $i_k\neq k$的排列出现的概率是多少?
  - 这样的排列称为“错位排列”(derangement)。
  - 适当的集合模型使问题得到简化。

错位排列的个数

- 我们将$i_k=k$称为“性质A_k”。满足性质A_k的排列构成所有排列的一个子集A_k。

错位排列的个数为：

$$N(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\ldots\overline{A_n}) = N - S_1 + S_2 - S_3 + \ldots + (-1)^k S_k + \ldots + (-1)^n S_n$$

其中：$N = n!$

S_k如前面的定义，即 $\sum_{1\le i_1\le i_2\ldots\le i_k\le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$

注意：保持k项不变的置换，即其余$n-k$项可任意排列。

所以：

$$S_1 = \binom{n}{1}(n-1)!;\ S_2 = \binom{n}{2}(n-2)!;\ \ldots,\ S_k = \binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!}$$

错位排列的个数

我们已经知道错位排列的个数为：

$$N(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\ldots\overline{A_n}) = N - S_1 + S_2 - S_3 + \ldots + (-1)^k S_k + \ldots + (-1)^n S_n$$

其中：$N = n!$

将诸$S_k = \binom{n}{k}(n-k)! = \dfrac{n!}{k!}(k = 1,2,3,\ldots,n)$代入上面的式子：

$$\therefore N(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\ldots\overline{A_n}) = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!};\ \therefore \text{要求的概率是：}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

注意：$\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$，所以这概率值与$e^{-1} \approx 0.367879\ldots$的差小于$\dfrac{1}{n!}$；

换句话说，除了较小的n，所求概率约为0.368，且与n无关。

本节提要

- 内容1：容斥原理
  - $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
- 内容2：鸽笼原理
- 内容3：排列与组合

鸽笼原理

- 若要将 n 只鸽子放到 m 个笼子中，且 $m<n$，则至少有一个笼子要装2个或更多的鸽子。
  - 证明：反证法。

- 一般形式：若将 n 只鸽子置于 m 个笼子中，则至少有一个笼子需容纳 $\lfloor (n-1)/m \rfloor +1$ 个 或更多鸽子。

注：对于 m>0 有 $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+m-1}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor + 1$

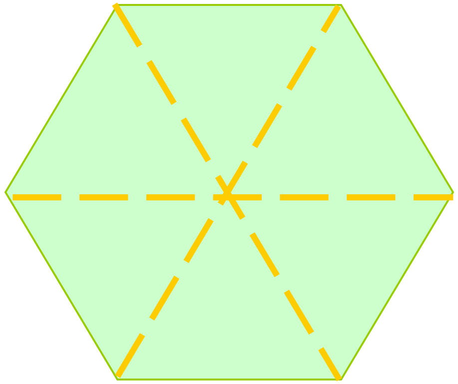
例

- 从 1 到 8 中任选 5 个数，其中必有两个数其和为9。
  - 何为鸽子？ 何为笼子？
  - 划分：{ {1,8}, {2,7}, {3,6}, {4,5} }

- 从集合 {1,2,⋯,20} 中选11个数，则必有一个是另一个的倍数。
  - 划分：{ {1，2，4，8，16}，{3，6，12}，{5，10，20}，{7，14}，{9，18}，{11}，{13}，{15}，{17}，{19} }

Not Too Far Apart

Problem: We have a region bounded by a regular hexagon whose sides are of length 1 unit. Show that if any seven points are chosen in this region, then two of them must be no farther apart than 1 unit.



The region can be divided into six equilateral triangles, then among 7 points randomly chosen in this region must be two located within one triangle.

Shaking Hands at a Gathering

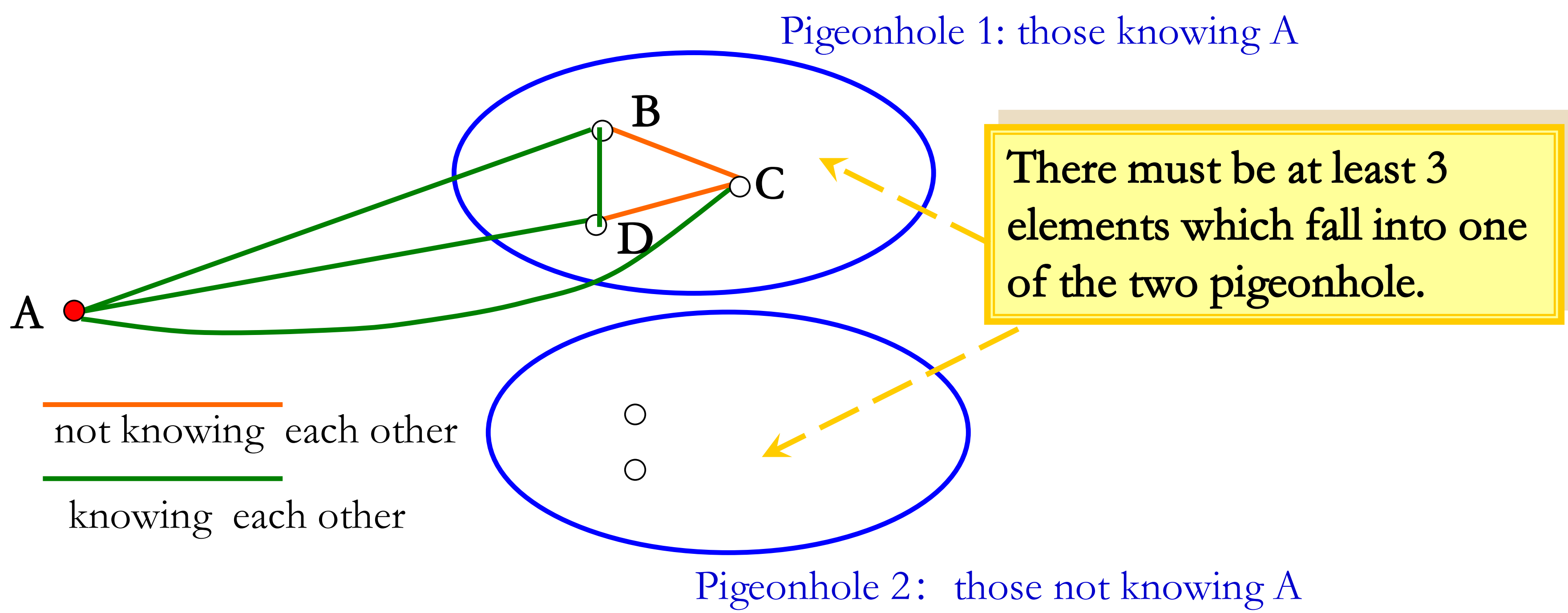
- Situation: at a gathering of n people, everyone shook hands with at least one person, and no one shook hands more than once with the same person.
- Problem: show that there must have been at least two of them who had the same number of handshaking.
- Solution:
  - Pigeon: the n participants
  - Pigeonhole: different number between 1 and n-1.

再例

- 任给一个正整数n, 总存在一个它的倍数，其十进制表示中只有0和1两个数字
  - 任给n，构造含有n+1个数的数列
    - 1，11，111，1111，…，11…11
  - 上述n+1个数必有两个数模n同余
  - 两数差：n的倍数，只有0和1

拉姆齐（Ramsey）数 $R(3,3)=6$

问题: 6 人之中要么有三人互相认识，要么有3人互不认识。



国际象棋运动员问题

- Situation: A chess player wants to prepare for a championship match by playing some practice games in 77 days. She wants to play at least one game a day but no more than 132 games altogether.
- Problem: show that no matter how she schedules the games there is a period of consecutive days within which she plays exactly 21 games.

Scheduling the Practice Games: Solution

Let a_i denote the *total* number of games she plays *up through the ith day*. Then, a_1, a_2, a_3,..., a_{76}, a_{77} is a monotonically increasing sequence, with $a_1 \geq 1$, and $a_{77} \leq 132$.

Note: if $a_i + 21 = a_j$ then the player plays 21 games during the days $i+1$, $i+2$, up through j.

Considering the sequence:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{76}, a_{77}, a_1+21, a_2+21, a_3+21, \ldots, a_{76}+21\ a_{77}+21$$

The least element in the sequence is 1, and the largest is 153. However, there are 154 elements in the sequence, so, there must be at least two elements having the same value.

Note that both the first and second half sequences are monotonically increasing, so, it is impossible for the two elements having the same value to be within one half sequence, that is, we have $a_i + 21 = a_j$

本节提要

- 内容1：容斥原理
  - $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
- 内容2：鸽笼原理
  - n 只鸽子放到 m 个笼子中，且 $m<n$，则至少有一个笼子要装2个或多个
- 内容3：排列与组合

排列组合计数基本原则

- 乘法原则
  - 做一件事有两个步骤，第一步有 n 种完成方式，第二步 m 种完成方式，则完成这件事情共有 m×n 种方法
    - 例：A 是有限集合，|A|=n. A的幂集有几个元素？

- 加法原则
  - 一件事情有两种做法，第一种做法有n种方式，第二种做法有m种方式，则完成这件事情共有m+n种方法
    - 定义标识符：由字符开头的8位字符数字串或者一位字符。共有多少个合法标识符？
    - 含数字1的小于10000的正整数个数

排列

- 考察有 n 个元素的集合，有多少种不同的有序遍历？
  - $n!$
- 考察有 n 个元素的集合，有序取出 r 个元素,元素不重复，有多少种可能的取法？（即 n 个元素的 r-排列 有多少个？）

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

例

1. 从52张扑克牌中发5张牌，如果考虑发牌次序，共有多少种牌型?
2. 密码是字母开头8位长字母和数字串，总共可以设计多少个密码?
3. 密码是字母开头8位长字母和数字串，如果不允许字母或者数字重复，总共可以设计多少个密码?
4. 将26个英文字母进行排列，有多少种排列以ABC开头?
5. 将26个英文字母进行排列，有多少种排列中含有ABC串?

组合

- 考察有 n 个元素的集合，如果取 r 个元素出来，共有多少种取法（即 r-组合 的个数）？
  - 含有 r 个元素的子集的个数
  - $C(n,r)=P(n,r)/P(r,r)$

$$\boxed{C(n,r)=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}}$$

$C(n,r)$ is also denoted by $\binom{n}{r}$ $\quad C_k^n \quad {}_nC_k \quad {}_nC_k \quad {}^nC_k \quad C_n^k$

例

1. 从52张扑克牌中发5张牌，如果不考虑发牌次序，共有多少种牌型？
2. 从52张扑克牌中发47张牌，如果从大到小排好，共有多少种牌型？
3. 从5个妇女和15个男性中选出一个包含2名妇女的5人委员会，有多少种可能？
4. 从5个妇女和15个男性中选出一个至少包含2名妇女的5人委员会，有多少种可能？
5. 长度为n的01位串中，有多少个串恰好包含r个1？

组合计数

- $C(n,r)=C(n,n-r)$的证明
  - 代数运算的证明：直接带入公式
  - 组合计数的证明：寻找双射（同一问题不同计数法）

集合的子集与其补集的双射

组合与二项式的系数

- $x+y = x + y$ 1 1
- $(x+y)^2=1x^2+2xy+1y^2$ 1 2 1
- $(x+y)^3=1x^3+3x^2y+3xy^2+1y^3$ 1, 3, 3, 1
- $(x+y)^4=?$

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

二项式定理推论 1

Let n be a nonnegative integer. Then

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

如何用组合计数的办法直接证明这个结论?

Proof: Using the binomial theorem with $x = 1$ and $y = 1$, we see that

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

This is the desired result.

二项式定理推论 2

Let n be a positive integer. Then

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0.$$

Proof: When we use the binomial theorem with $x=-1$ and $y=1$, we see that

$$0=0^n=((-1)+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k.$$

This proves the corollary.

这就是说 $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots.$

二项式定理推论 3

Let n be a nonnegative integer. Then

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n.$$

$$(1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k.$$

杨辉三角（Pascal Triangle）

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$\binom{0}{0}$

$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

$\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$

$\binom{6}{0}$ $\binom{6}{1}$ $\binom{6}{2}$ $\binom{6}{3}$ $\binom{6}{4}$ $\binom{6}{5}$

$\binom{7}{0}$ $\binom{7}{1}$ $\binom{7}{2}$ $\binom{7}{3}$ $\binom{7}{4}$ $\binom{7}{5}$ $\binom{7}{6}$

$\binom{8}{0}$ $\binom{8}{1}$ $\binom{8}{2}$ $\binom{8}{3}$ $\binom{8}{4}$ $\binom{8}{5}$ $\binom{8}{6}$ $\binom{8}{7}$ $\binom{8}{8}$

$\cdots$

By dentity:

$\binom{6}{4}$ $\binom{7}{5}$

如何用组合计数的办法直接证明这个结论?

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1

1

6 1

1 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

$\cdots$

Vandermonde's Identity

VANDERMONDE'S IDENTITY Let m, n, and r be nonnegative integers with r not exceeding either m or n. Then

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}.$$

如何用组合计数的办法直接证明这个结论?

多项式系数

- 可将二项式定理推广到多项式定理:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n=\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n}\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m}\prod_{t=1}^{m}x_t^{k_t},$$

$$\text{其中}\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m}=\frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_m!}$$

我们可以这样考虑: 从$n_1+n_2+\cdots+n_t=n$中选n_i 个x_i, 则有

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{t-1}}{n_t}=$$

$$\frac{n!(n-n_1)!(n-n_1-n_2)!\cdots(n-n_1-n_2-\cdots-n_{t-1})!}{n_1!(n-n_1)!n_2!(n-n_1-n_2)!n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!\cdots n_t!(n-n_1-n_2-\cdots-n_t)!}=\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_t!}$$

用于证明费马小定理

- 费马小定理. 设正整数 a 不是素数 p 的倍数，则

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

  - 证明概要:
    - $a^p = (1+1+\cdots+1)^p = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_a} \frac{p!}{k_1!,k_2!\ldots k_a!}$, $\quad \sum_{i=1}^{a} k_i = p$

      (这是多项式系数)
    - 考虑 $\frac{p!}{k_1!,k_2!\ldots k_a!}$，若其中没有$k_i = p$，则 $\frac{p!}{k_1!,k_2!\ldots k_a!} \equiv 0 \pmod{p}$，若有$k_i = p$，则其它$k_j = 0$，于是 $\frac{p!}{k_1!,k_2!\ldots k_a!} \equiv 1 \pmod{p}$；
    - 总共恰有a个$k_i = p$.

圆排列

- 从n个不同元素中，取r个不重复的元素排成一个圆圈，有 $P(n,r)/r$ 种排列方法

有不可区分物体的排列

- 把单词“mathematics”中的字母重新排列，可以得到多少个不同的“单词”？

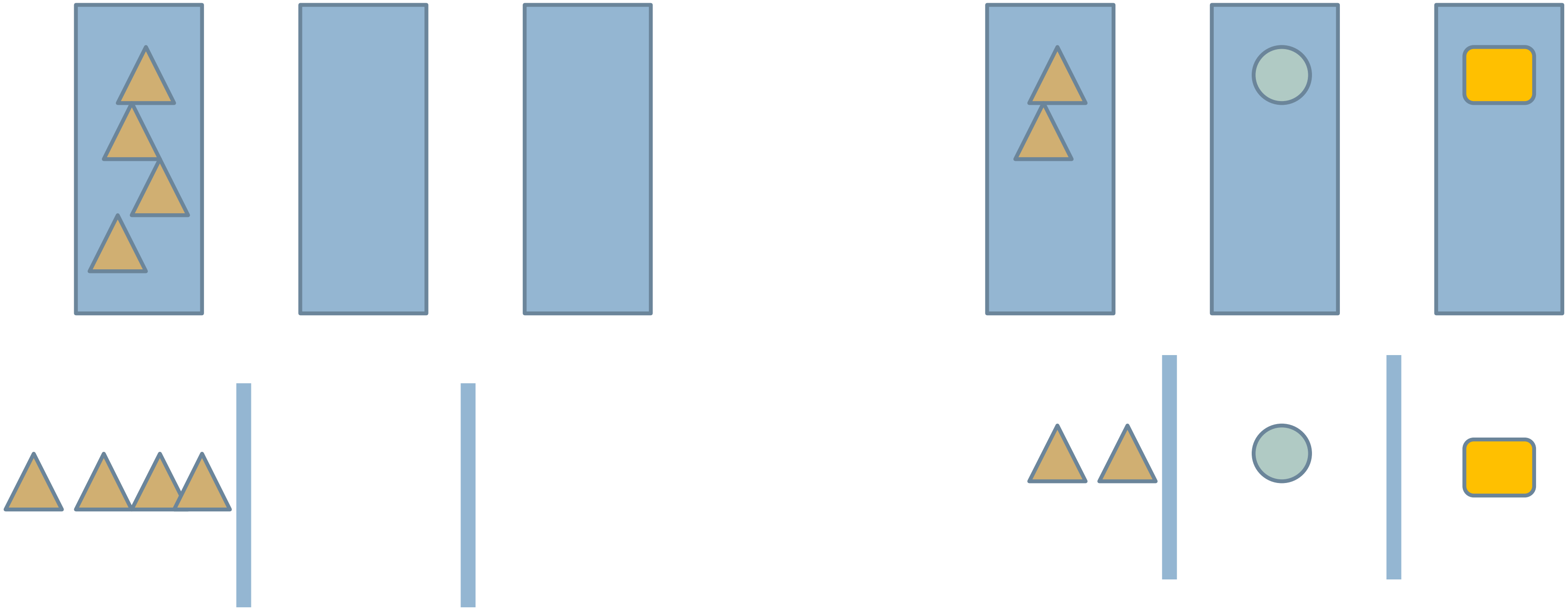
- 在n个有不可区分项的对象集中，得到不同的n排列的个数是：
  - 令 m_i 是第 i 个重复项的重复次数

$$P(n,n)/\prod m_i!$$

在单词“mathematics”中只抽取4个字母，可以组合出多少个不同的单词？

有重复的组合

- 厨房有三种水果，每样都超过4个。从厨房取4个水果，有多少种取法？



n个元素集合中允许重复的r组合

- C(n+r-1, r)

- 例:
  - 甜点店4种面包，有几种买6个面包的买法?
  - 方程x+y+z=11有多少组解? 其中x,y,z非负整数
  - 如果x>0,y>1,z>2时，上述方程有多少组解?

允许重复的排列组合

Type	*Repetition Allowed?*	*Formula*
r-permutations	No	$\dfrac{n!}{(n-r)!}$
r-combinations	No	$\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$
r-permutations	Yes	n^r
r-combinations	Yes	$\dfrac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$

本节小结

- 内容1：容斥原理
  - $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$
- 内容2：鸽笼原理
  - n 只鸽子放到 m 个笼子中，且 $m<n$，则至少有一个笼子要装2个或多个
- 内容3：排列与组合
  - 组合与二项式定理、组合计数方法、圆排列、不可区分物的排列、是否允许重复等

作业

- 见课程网站

生成函数

- 简单地说, 生成函数 (**generating function**) 是一种把无限数列表示成幂序列的系数的表示方法

$$F(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \cdots.$$

我们用$[x^n]F(x)$来指代这个生成函数中x^n的系数f_n.

例如, 用几何级数的系数来表示数列 $1, 1, 1, \cdots$

$$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots .$$

又如, $H(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$ 表示 $1, -2, 3, -4, \cdots$.

说明: (1)生成函数又译为“母函数”. (2)这里只讨论上述所谓普通(ordinary)生成函数. (3) 毋需关心这个“函数”是否收敛, 我们只是借助其代数表示. (4)这里仅做较为直观的介绍, 系统的讨论见《组合数学》课程.

生成函数的简单表示式

求 $G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ 的简单表达式

$$\begin{array}{rcl} G(x) & = & 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \\ -xG(x) & = & \quad - x - x^2 - x^3 - \cdots - x^n - \cdots \\ \hline G(x) - xG(x) = 1. & & \end{array}$$

解方程, 得

$$\frac{1}{1-x} = G(x) ::= \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

即

$$[x^n]\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1$$

生成函数的简单表示式

求 $N(x)=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$ 的简单表达式

$$\begin{array}{rcl} N(x) = & 1 & +2x+3x^2+4x^3+\cdots+(n+1)x^n+\cdots \\ -xN(x) = & & -x-2x^2-3x^3-\cdots-nx^n-\cdots \\ \hline N(x)-xN(x) = & 1 & +x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots \\ & & =G(x). \end{array}$$

解方程, 得

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{G(x)}{1-x}=N(x)::=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

即

$$[x^n]\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)=n+1.$$

用生成函数计数

- 生成函数常用来解“有几种方法选n个对象”的问题.
  - 假设有鲜肉包、梅菜包两种包子可买, 买n个包子有几种方法?

$$\frac{1}{(1-x)^2} = N(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots,$$

$$[x^n]N(x) = n + 1.$$

  - 假设现在梅菜包只能六个六个的买; 而鲜肉包虽随便买几个, 但又分为猪肉包和牛肉包两种, 咋办?
    - 梅菜包

$$\begin{aligned} A(x) &= 1 + x^6 + x^{12} + \cdots + x^{6n} + \cdots \\ &= 1 + y + y^2 + \cdots + y^n + \cdots \qquad \text{where } y = x^6 \\ &= \frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-x^6}. \end{aligned}$$

    - 两种肉包

$$B(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

    - 问题的解应该是

$$a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots + a_nb_0.$$

生成函数乘法规则：

$$[x^n](A(x)\cdot B(x)) = a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots + a_nb_0.$$

卷积规则

- 计数的**卷积规则**:
  令$A(x)$为从集合$\mathcal{A}$中选择对象的选法计数所对应的生成函数, $B(x)$为从集合$\mathcal{B}$中选择对象所对应的生成函数, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, 则$A(x) \cdot B(x)$为从$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$中选择对象所对应的生成函数.
  - 更严格地说, 这里要求从$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$中选择对象的方法一一对应于有序对$(a, b)$, 其中$a$为从从集合$\mathcal{A}$中选择对象的方法, b为从$\mathcal{B}$中选择对象的方法.

卷积规则的应用

- 一个拧巴的问题
  - 猪肉包必须是偶数个;
  - 牛肉包必须五个五个地买;
  - 最多买4个梅菜包;
  - 最多买一个三丁包.

$$A(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \frac{1}{1-x^2}$$

$$B(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots = \frac{1}{1-x^5}$$

$$O(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1-x^5}{1-x}$$

$$P(x) = 1 + x$$

例如总共买6个包子

6	4	4	2	2	0	0
0	0	0	0	0	5	5
0	2	1	4	3	1	0
0	0	1	0	1	0	1

$$\begin{aligned} A(x)B(x)O(x)P(x) &= \frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^5}\frac{1-x^5}{1-x}(1+x) \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \end{aligned}$$

此题凑巧，更复杂的情况如何求呢?